

STRIŽNE NAPETOSTI V ELASTIČNIH DVOSLOJNIH LESENIH NOSILCIH Z UPOŠTEVANJEM ZDRSA MED SLOJEMA

SHEAR STRESSES IN ELASTIC TIMBER COMPOSITE TWO-LAYER BEAMS WITH INTERLAYER SLIPS

asist. dr. Bojan Čas, univ. dipl. inž. grad.

bojan.cas@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo

in geodezijo,

Jamova 2, Ljubljana

Znanstveni članek

UDK/UDC: 624.011.1+624.042

Povzetek | V članku analiziramo vpliv zdrsa med slojema na mehansko obnašanje dvoslojnih kompozitnih prostorskih nosilcev. Podrobno nas zanima predvsem vpliv podajnosti stika slojev na razporeditev in velikost strižnih napetosti v prečnih prerezih dvoslojnih lesenih nosilcev. Strižne napetosti v slojih izračunamo na tri načine: (i) z razvitim matematičnim modelom in pripadajočimi analitičnimi rešitvami, (ii) z računsko metodo, kot jo predlaga veljavna zakonodaja s področja lesenih konstrukcij, standard Evrokod 5 (SIST, 2005), ter (iii) s predlagano modificirano enačbo omenjenega standarda za izračun strižnih napetosti. Primerjava razporeditve in velikosti strižnih napetosti v slojih je pokazala dobro ujemanje med rezultati matematičnega modela ter rezultati ustrezno modificirane enačbe standarda Evrokod 5 (SIST, 2005).

Ključne besede: 3D-nosilci, elastičnost, kompoziti, zdrs, les, analitična rešitev, strižne napetosti

Summary | This article focuses on three-dimensional two-layer composite beams with slips between the layers. The effect of contact stiffness on shear stresses in composite beam cross-section is studied in detail. Shear stresses are calculated by the application of: (i) a presented mathematical model with analytical solution, (ii) calculation method for layered timber beams with interlayer slips, as proposed by Eurocode 5 (SIST, 2005) and (iii) a suggested modified equation of the abovementioned standard for the calculation of shear stresses in timber composite beam cross-section. The comparison of the distribution and values of shear stresses in composite cross-section shows a good agreement of the results obtained by the presented mathematical model with the results calculated by the proposed modified Eurocode 5 (SIST, 2005) equation.

Key words: 3D beams, elasticity, composites, slip, timber, analytical solution, shear stress

1 • UVOD

Dandanes so slojevite kompozitne konstrukcije pogosto v uporabi v najrazličnejših aplikacijah vesoljske, avtomobilske, ladijske ter letalske industrije, pogosta pa je tudi njihova uporaba na področju gradbeništva. Uporabljene so predvsem zaradi njihovih odličnih

lastnosti, kot so ugodno razmerje med težo ter togostjo njihovih prečnih prerezov, dobra odpornost proti koroziji, njihova trajnost, toplotna izolativnost, požarna odpornost, možnost dušenja energije in številne druge. Značilne slojevite kompozitne konstrukcije oziroma kon-

strukcijski elementi, ki so uporabljeni v gradbeništvu, so sovprežne konstrukcije iz jekla in betona ali lesa in betona, slojevite lesene konstrukcije, lamelirane konstrukcije iz stekla, armiranobetonske konstrukcije, ojačane z doplepljanjem kovinskih lamel ali z vlakni ojačanih polimernih trakov in ploskovnih elementov. Do uporabe tovrstnih konstrukcij nas pripelje bodisi zasnova novih konstrukcij bodisi sanacijski postopki obstoječih dotrajanih in zastarelih

konstrukcij, pogosto pa tudi sami tehnološki pristopi pri gradnji.

Na podlagi navedenega ugotovimo, da je uporabnost slojevitih kompozitnih konstrukcij v gradbeništvu velika. Vendar njihova uporaba ni brezpogojna, saj je pogojena z materialno-tehničnimi lastnostmi slojev kot tudi lastnostmi stikovanja posameznih slojev kompozitnih konstrukcij. Potrebno togost stika med sloji kompozitnih konstrukcij dosežemo z uporabo ustreznih veznih sredstev. Ta se razlikujejo glede na vrsto uporabljenega materiala in glede na stopnjo povezanosti, ki jo zagotavljajo posameznemu stiku med sloji. V splošnem so sloji kompozitnih konstrukcij povezani tako, podajno ali pa so nepovezani. Običajno so sloji različnih materialov medsebojno povezani z diskretno razporejenimi mehanskimi veznimi sredstvi, kot so npr. mozniki, vijaki, žebliji, mogoča pa je tudi zvezna izvedba stikov z uporabo elastomernih ali viskoelastičnih materialov.

Večina povezav slojev v kompozitnih konstrukcijah je podajnih z določeno stopnjo togosti. To pomeni, da se ob deformiranju teh konstrukcij relativnim zamikom oziroma zdrsom med posameznimi sloji ne moremo izogniti. Glede na dejstvo, da podajnost povezave ter z njo povezani relativni zamiki slojev bistveno vplivajo na napetostno in deformacijsko stanje slojevitih kompozitnih konstrukcij, so tovrstne raziskave bistvene za pravilno razumevanje obnašanja teh konstrukcij.

Tako je bilo v preteklosti opravljenega veliko znanstvenoraziskovalnega dela z namenom boljšega razumevanja obnašanja slojevitih kompozitnih konstrukcij ob upoštevanju zdrsa med posameznimi sloji. To je zbrano v številnih objavah v znanstvenih revijah. Newmark

s sodelavci (Newmark, 1951) je med prvimi eksperimentalno analiziral sovprežne nosilce iz jekla in betona z upoštevanjem podajne povezave slojev. V svojih raziskavah so uporabili linearno Euler-Bernoullijevo teorijo nosilcev. Ugotovili so, da je za inženirsko analizo sovprežnih konstrukcij standardni račun z upoštevanjem togega stika dovolj natančen. Na podlagi tega dela je bilo razvito večje število analitičnih računskih modelov za analizo dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Goodman in Popov (Goodman, 1968), Girhammar in Gopu (Girhammar, 1993), Schnabl s sodelavci (Schnabl, 2007), Sousa in Silva (Sousa, 2010), Monetto (Monetto, 2015) ter Wu s sodelavci (Wu, 2016) so obravnavali slojevite kompozitne nosilce s podajno povezavo treh ali več slojev, Xu in Escedi s sodelavci ((Xu, 2013), (Escedi, 2016)) so obravnavali dvoslojne nosilce, pri katerih je bil zajet tudi vpliv strižnih deformacij skladno s Timoshenkovo teorijo nosilcev, Ranzi s sodelavci (Ranzi, 2006) je analiziral časovno odvisne vplive na obnašanje kompozitnih konstrukcij, Faraboschi (Faraboschi, 2009) in Campi s sodelavci (Campi, 2013) nelinearne ali bilinearne zakone stika, Kroflič ter Schnabl s sodelavci ((Kroflič, 2019), (Schnabl, 2013)) sta upoštevala možnosti razmika slojev, Girhammar (Girhammar, 2009) pa je analiziral dinamični odziv tovrstnih nosilcev.

Poleg analitičnih raziskav je bilo precej raziskovalnega napora vloženega v razvoj številnih računskih modelov za analizo obnašanja slojevitih kompozitnih nosilcev. Adekola (Adekola, 1986) ter Lin in sodelavci (Lin, 2017) so razvili končne elemente za analizo kompozitnih nosilcev, dinamično obnašanje tovrstnih konstrukcij sta obravnavala Shen in Lenci s

sodelavci ((Shen, 2011), (Lenci, 2012)), numerično analizo sovprežnih nosilcev iz jekla in betona pa sta predstavila Faella in Martinelli s sodelavci ((Faella, 2010), (Martinelli, 2012)).

Glede na dostopno znanstveno literaturo ocenjujemo, da sta le Challamel in Girhammar ((Challamel, 2012), (Challamel, 2013)) razvila analitično rešitev obnašanja prostorskih dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Analitična rešitev omenjenih avtorjev obravnava problematiko upogibnega in torzijskega uklona vzdolžno ter prečno podajno povezanih slojev kompozitnih nosilcev, izpostavljenih enakomerni upogibni obremenitvi.

V tem prispevku na kratko predstavimo razviti matematični model za analizo obnašanja prostorskih slojevitih kompozitnih nosilcev s podajno povezavo med sloji s pripadajočo analitično rešitvijo. Predstavljen je tudi pristop k analizi lesenih slojevitih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji skladno z veljavno zakonodajo, standardom za lesene konstrukcije Evrokod 5 (SIST, 2005). V nadaljevanju, upoštevaje osnove mehanike nosilcev, predlagamo modifikacijo enačbe iz navedenega standarda za izračun največje strižne napetosti v prečnem prerezu osrednjega lesenega elementa. Za značilni dvoslojni leseni kompozitni nosilec so v članku predstavljeni rezultati deformacijsko-napetostnega stanja razvitega matematičnega modela s poudarkom na poteku strižnih napetosti vzdolž stika slojev ter po slojevitem prečnem prerezu. Rezultati so primerjani z rezultati računskega postopka standarda Evrokod 5 (SIST, 2005) ter predlagano modificirano enačbo tega standarda za izračun strižnih napetosti v prečnih prerezi dvoslojnih lesenih nosilcev.

opišemo deformirano lego kompozitnega nosilca. V splošnem sta oba sloja prostorskega kompozitnega nosilca obremenjena z linijsko obtežbo $\mathcal{P}^i$ in linijsko momentno obtežbo $\mathcal{M}^i$ ($i = a, b$). Ta je sestavljena iz kontaktne obtežbe in zunanje obtežbe. Pomen uporabljenih oznak smo prikazali v preglednici 1.

2.2 Predpostavke matematičnega modela

Osnovne predpostavke pri izpeljavi osnovnih enačb predstavljenega matematičnega modela so:

1. prečni prerezi slojev kompozitnega nosilca zavzemajo prizmatično obliko, vgrajen material slojev je homogen, izotropen ter linearno elastičen,

2 • OSNOVNE ENAČBE

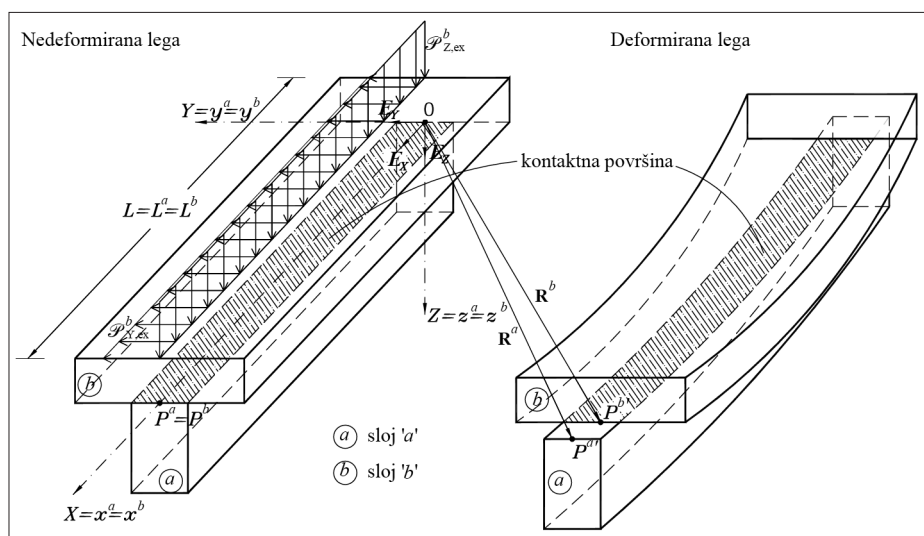
2.1 Uvod

Na sliki 1 sta prikazani osnovna nedeformirana in deformirana lega ravnega prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca z začetno dolžino L . Sloja nosilca, ki sta lahko v splošnem iz poljubnega materiala, sta označena kot a in b . Oba sloja imata enaki začetni dolžini $L \equiv L_a \equiv L_b$, ter v splošnem različna, vendar konstantna prečna prereza prizmatične oblike površine A_x^a in A_x^b . Sloja kompozitnega nosilca sta medsebojno povezana s podajnim stikom zanemarljive debeline.

Dvoslojni kompozitni nosilec je obravnavan v desnosučnem kartezičnem koordinatnem sistemu s prostorskimi koordinatami X, Y, Z in ortnonormiranimi baznimi vektorji $\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z$. Sloja a in b kompozitnega nosilca imata v nedeformirani legi skupno referenčno os, ki sovpada z globalno osjo X kartezičevega koordinatnega sistema. Referenčna os je v nedeformirani legi parametrizirana z naravnim parametrom x . Z materialnim koordinatnim sistemom x, y, z , ki v nedeformirani legi sovpada s koordinatami prostorskega koordinatnega sistema X, Y, Z ,

Oznake:		M_X^i, M_Y^i, M_Z^i	torzijski moment okoli osi X in upogibna momenta okoli osi Y in Z
A_X^i	površina prečnega prereza	p_X^i, p_Y^i	komponente vektorja napetosti na stiku slojev v smeri osi X in Y
b_c	širina stika	u^i, v^i, w	pomiki v smeri osi X, Y in Z
E^i	modul elastičnosti	$\omega_X, \omega_Y, \omega_Z^i$	zasuki okoli osi X, Y in Z
G^i	strižni modul	$\Delta u, \Delta v$	razlika pomikov v smeri osi X in Y
I_X^i	torzijski vztrajnostni moment glede na os X	Δ_X, Δ_Y	zdrsi v smeri osi X in Y
I_Y^i, I_Z^i	upogibni vztrajnostni moment glede na os Y in Z	$\mathcal{E}_{XX}^i$	specifična sprememba dolžine materialnega vlakna v smeri osi X
S_Y^i, S_Z^i	statični moment glede na os Y in Z	K_X, K_Y, K_Z^i	torzijska in upogibni ukrivljenosti okoli osi X, Y in Z
K_X, K_Y	togost stika v smeri osi X in Y	Nadpisano/podpisano:	
$\mathcal{P}_X^i, \mathcal{P}_Y^i, \mathcal{P}_Z^i, \mathcal{M}_X^i, \mathcal{M}_Y^i, \mathcal{M}_Z^i$	komponente linijske in linijske momentne obtežbe v smeri E_X, E_Y, E_Z	ex	zunanje
N_X^i, N_Y^i, N_Z^i	osna in prečni sili v smeri X, Y in Z	$i = a, b$	oznaka slojev

Preglednica 1 • Pomen oznak.



Slika 1 • Prikaz osnovne in deformirane lege dvoslojnega prostorskega kompozitnega nosilca s podajno povezavo slojev.

2. obnašanje vsakega izmed slojev opišemo z linearizirano Reissner-Simovo teorijo strižno nepodajnih prostorskih nosilcev (Simo, 1985),
3. sloja kompozitnega nosilca sta povezana s podajnim slojem zanemarljive debeline,
4. na stiku slojev se lahko pojavijo le zamiki, razslojevanje med slojema ni mogoče,

5. oblika in velikost prečnih prereзов kompozitnega nosilca se med deformiranjem ne spreminjajo,
6. zanemarjeni so toplotni vplivi, reološki pojavi, začetne zaostale napetosti, izbočitev prečnih prereзов,
7. lokalna ali globalna nestabilnost elementov je preprečena,
8. zdrsi med sloji kompozitnega nosilca so majhni.

2.3 Osnovne enačbe prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca s podajno povezavo slojev

Osnovne matematične enačbe prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca s podajno povezavo slojev so: (i) kinematične, (ii) ravnotežne ter (iii) konstitucijske enačbe s pripadajočimi statičnimi oziroma kinematičnimi robnimi pogoji vsakega izmed slojev. Zaradi (iv) veznih enačb, ki določajo povezavo med slojema, navedene skupine enačb niso neodvisne. V nadaljevanju dodamo oznakam količin indekse $(\bullet)^i$, kjer indeks $i = a, b$ označuje, kateremu izmed slojev količina pripada. Na podoben način je treba razumeti tudi oznako $(\bullet)' = d(\bullet)/dx$, ki predstavlja odvod količine $(\bullet)$ glede na materialno koordinato x . Glede na povedano, sestavlja posplošene ravnotežne enačbe dvoslojnega prostorskega elastičnega nosilca z upoštevanjem zdrsa med slojema sistem algebrskih in navadnih diferencialnih enačb z ustreznimi robnimi pogoji (Čas, 2018):

Kinematične enačbe:

$$u^a' - \mathcal{E}_{XX}^a = 0, \quad (1)$$

$$u^b' - \mathcal{E}_{XX}^b = 0, \quad (2)$$

$$v^a' - \omega_X^a = 0, \quad (3)$$

$$v^b' - \omega_X^b = 0, \quad (4)$$

$$w' + \omega_Y = 0, \quad (5)$$

$$\omega_X' - \kappa_X = 0, \quad (6)$$

$$\omega_Y' - \kappa_Y = 0, \quad (7)$$

$$\omega_Z^a' - \kappa_Z^a = 0, \quad (8)$$

$$\omega_Z^b' - \kappa_Z^b = 0. \quad (9)$$

Ravnotežne enačbe:

$$N_X^a' + \mathcal{P}_{X,ex}^a + K_X b_c \Delta u = 0, \quad (10)$$

$$N_X^b' + \mathcal{P}_{X,ex}^b - K_X b_c \Delta u = 0, \quad (11)$$

$$N_Y^a' + \mathcal{P}_{Y,ex}^a + K_Y b_c \Delta v = 0, \quad (12)$$

$$N_Y^b' + \mathcal{P}_{Y,ex}^b - K_Y b_c \Delta v = 0, \quad (13)$$

$$N_Z' + \mathcal{P}_{Z,ex}^a + \mathcal{P}_{Z,ex}^b = 0, \quad (14)$$

$$M_X' + \mathcal{M}_{X,ex}^a + \mathcal{M}_{X,ex}^b = 0, \quad (15)$$

$$M_Y' - N_Z + \mathcal{M}_{Y,ex}^a + \mathcal{M}_{Y,ex}^b = 0, \quad (16)$$

$$M_z^a + N_y^a + \frac{K_x b^3}{12} \Delta \omega_z + \mathcal{M}_{z,ex}^a = 0, \quad (17)$$

$$M_z^b + N_y^b - \frac{K_x b^3}{12} \Delta \omega_z + \mathcal{M}_{z,ex}^b = 0. \quad (18)$$

Konstitucijske enačbe:

$$N_x^a = E^a A_x^a \varepsilon_{xx}^a + E^a S_y^a \kappa_y = C_{11}^a \varepsilon_{xx}^a + C_{14}^a \kappa_y, \quad (19)$$

$$N_x^b = E^b A_x^b \varepsilon_{xx}^b + E^b S_y^b \kappa_y = C_{22}^b \varepsilon_{xx}^b + C_{24}^b \kappa_y, \quad (20)$$

$$M_x^a = G^a I_x^{eff} \kappa_x = C_{33}^a \kappa_x, \quad (21)$$

$$M_y^a = E^a S_y^a \varepsilon_{xx}^a + E^b S_y^b \varepsilon_{xx}^b + E^a I_y^{eff} \kappa_y = C_{41}^a \varepsilon_{xx}^a + C_{42}^b \varepsilon_{xx}^b + C_{44}^a \kappa_y, \quad (22)$$

$$M_z^a = E^a I_y^a \kappa_z = C_{55}^a \kappa_z, \quad (23)$$

$$M_z^b = E^b I_y^b \kappa_z = C_{66}^b \kappa_z. \quad (24)$$

Robni pogoji

pri $x = x^a = x^b = 0$:

$$\begin{aligned} U_1^a - u^a(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_1^a + N_x^a(0) = 0, \\ U_1^b - u^b(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_1^b + N_x^b(0) = 0, \\ U_2^a - v^a(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_2^a + N_y^a(0) = 0, \\ U_2^b - v^b(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_2^b + N_y^b(0) = 0, \\ U_3 - w(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_3^a + S_3^b + N_z(0) = 0, \\ U_4 - \omega_x(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_4^a + S_4^b + M_x(0) = 0, \\ U_5 - \omega_y(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_5^a + S_5^b + M_y(0) = 0, \\ U_6^a - \omega_z^a(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_6^a + M_z^a(0) = 0, \\ U_6^b - \omega_z^b(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_6^b + M_z^b(0) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

pri $x = x^a = x^b = L$:

$$\begin{aligned} U_7^a - u^a(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_7^a - N_x^a(L) = 0, \\ U_7^b - u^b(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_7^b - N_x^b(L) = 0, \\ U_8^a - v^a(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_8^a - N_y^a(L) = 0, \\ U_8^b - v^b(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_8^b - N_y^b(L) = 0, \\ U_9 - w(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_9^a + S_9^b - N_z(L) = 0, \\ U_{10} - \omega_x(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_{10}^a + S_{10}^b - M_x(L) = 0, \\ U_{11} - \omega_y(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_{11}^a + S_{11}^b - M_y(L) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{12}^a - \omega_z^a(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_{12}^a - M_z^a(L) = 0, \\ U_{12}^b - \omega_z^b(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad S_{12}^b - M_z^b(L) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Vezne enačbe:

$$\Delta x = \Delta u - y \Delta \omega_z, \quad (27)$$

$$\Delta y = \Delta v, \quad (28)$$

$$p_x^a = -p_x^b = K_x \Delta x, \quad (29)$$

$$p_y^a = -p_y^b = K_y \Delta y, \quad (30)$$

kjer smo označili

$$\Delta u = u^b - u^a, \quad (31)$$

$$\Delta v = v^b - v^a, \quad (32)$$

$$\Delta \omega_z = \omega_z^b - \omega_z^a, \quad (33)$$

$$I_x^{eff} = I_x^a + \frac{G^b}{G^a} I_x^b, \quad (34)$$

$$I_y^{eff} = I_y^a + \frac{E^b}{E^a} I_y^b. \quad (35)$$

Sistem enačb (1)–(24) sestavlja 24 algebrskih in navadnih linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti za ravno toliko neznanih funkcij koordinate x :

$$u^a, u^b, v^a, v^b, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z^a, \omega_z^b, \varepsilon_{xx}^a, \varepsilon_{xx}^b, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_z^a, \kappa_z^b, N_x^a, N_x^b, N_y^a, N_y^b, N_z, M_x, M_y, M_z^a, M_z^b.$$

V enačbah (25) in (26) smo z U_j^i ter S_j^i ($j=1, \dots, 12$) označili robne vrednosti kinematičnih in statičnih količin pri $x=0$ in $x=L$.

Osnovne enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca (1)–(24) lahko zapišemo tudi v obliki nepovezanega sistema dveh diferencialnih enačb višjega reda:

$$\Delta u''' - a_{11} \Delta u' - a_{12} = 0, \quad (36)$$

$$\Delta v''' - a_{21} \Delta v' - a_{22} \Delta v - a_{23} = 0. \quad (37)$$

Analično rešitev sistema enačb (36) in (37) izvednotimo s pomočjo programske opreme MATHEMATICA (Wolfram S., 2017). Dobljene rešitve zaradi velikosti ter njihove

kompleksnosti v pričujočem prispevku niso prikazane.

Strižne napetosti v prečnih prerezih vsakega izmed slojev prostorskega kompozitnega nosilca je mogoče izračunati s t. i. postopkom postprocesiranja ter na osnovi poznanih geometrijskih karakteristik nosilca, notranjih statičnih količin posameznega sloja, zunanjih obtežb slojev in znanih kontaktnih napetosti na stiku slojev kompozitnega nosilca (Srpčič, 2003). V nadaljevanju prikazujemo analitična izraza za izračun strižnih napetosti τ_{xz} v prečnem prerezu slojev kompozitnega nosilca, katerega prečna prereza sta pravokotne oblike, nosilec pa je obremenjen le s prečno linijsko obtežbo $\mathcal{P}_{Y,ex}^i$ in $\mathcal{P}_{Z,ex}^i$ ($i = a, b$).

$$\tau_{xz}^a(z) = \frac{1}{b^a} \left[\min(b^a, b^b) \left(-p_x^a \frac{\bar{A}_x^a(z)}{A_x^a} + p_x^a \right) - \left(N_z^a - \min(b^a, b^b) p_x^a \frac{h^a}{2} \right) \frac{\bar{S}_y^a(z)}{I_y^a} - N_y^a \frac{\bar{S}_z^a(z)}{I_z^a} \right], \quad (38)$$

$$\tau_{xz}^b(z) = \frac{1}{b^b} \left[\min(b^a, b^b) p_x^b \frac{\bar{A}_x^b(z)}{A_x^b} - \left(N_z^b - \min(b^a, b^b) p_x^b \frac{h^b}{2} \right) \frac{\bar{S}_y^b(z)}{I_y^b} - N_y^b \frac{\bar{S}_z^b(z)}{I_z^b} \right]. \quad (39)$$

Računsko analizo tovrstnih lesenih kompozitnih nosilcev omogoča tudi standard (SIST, 2005), kar predstavimo v nadaljevanju.

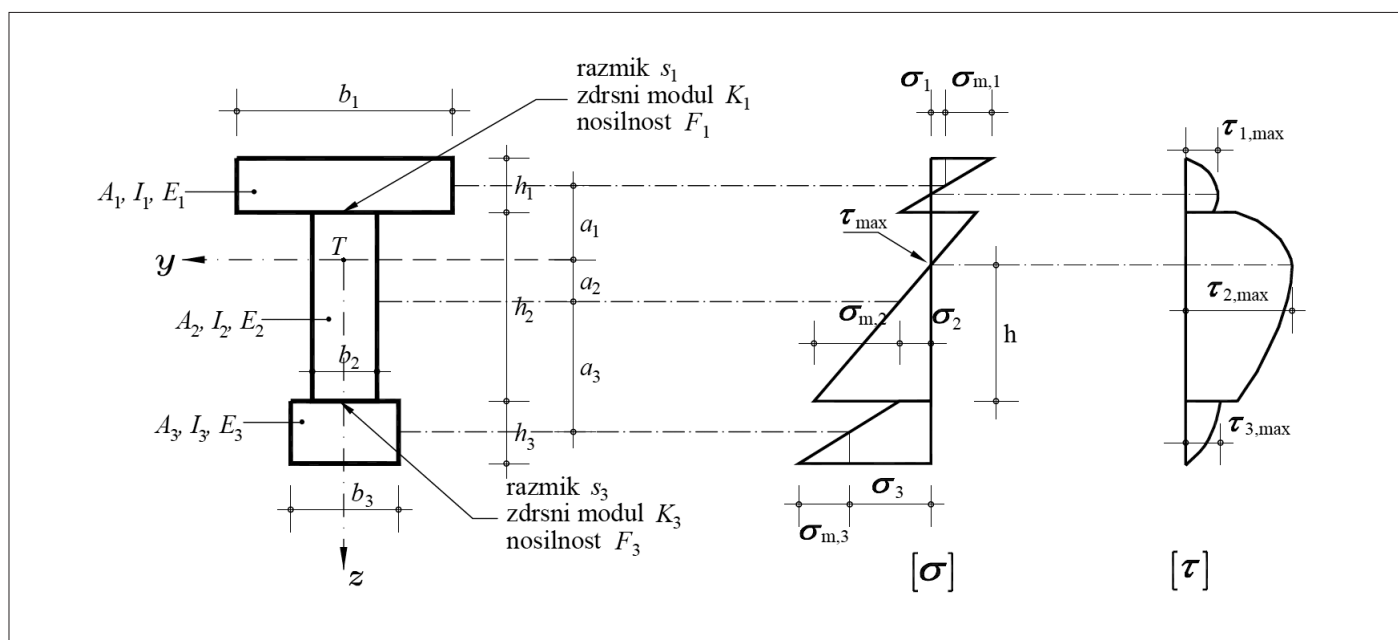
oznake slojev, potek normalnih in strižnih napetosti ter lego največje strižne napetosti v prečnem prerezu slojevitiga lesenega nosilca skladno s standardom Evrokod 5 (SIST, 2005). Metoda, kot je predstavljena v navedenem standardu, privzame, da podprerez z oznako 2 predstavlja osrednji prerez sestavljenega prečnega prereza, na katerega sta preko podajne stične površine, ki jo opiše parameter γ , priključena podprereza z oznako 1 in 3. V predhodnem poglavju smo oznake količin, ki pripadajo slojem kompozitnega nosilca, označili z nadpisanim indeksom $(\bullet)^i$, medtem ko

3 • ANALIZA LESENIH SLOJEVITIH NOSILCEV SKLADNO Z EVROKODOM 5 (SIST, 2005)

3.1 Splošno

V nadaljevanju predstavimo bistvene predpostavke in enačbe za analizo lesenih slojevitih nosilcev skladno z veljavno zakonodajo s področja lesenih konstrukcij Evrokod 5 (SIST, 2005). Predstavljena metoda omogoča inženirsko računsko analizo deformacijsko-napetostnega stanja dvo- ali trislojnih lesenih

nosilcev s podajno povezavo slojev in temelji na t. i. efektivni upogibni togosti sestavljenega prečnega prereza. S pomočjo parametra γ zajamemo vpliv podajnosti stika oziroma podajnosti veznih sredstev na upogibno togost sestavljenih nosilcev ($\gamma=0$ pomeni povsem podajno povezavo, $\gamma=1$ pa povsem toga). Na sliki 2 prikazujemo geometrijske ter materialne



Slika 2 • Geometrijske in materialne oznake slojev lesenega sestavljenega prereza skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005) ter karakterističen potek normalnih in strižnih napetosti.

Evrokod 5 (SIST, 2005) uporablja podpisane indekse $(\bullet)_i$. Takšen način označevanja uporabimo tudi v nadaljevanju tega poglavja.

3.2 Efektivna upogibna togost sestavljenega lesenega prečnega prereza

Za izračun efektivne upogibne togosti sestavljenega lesenega prečnega prereza s podajno povezavo slojev je podana naslednja enačba:

$$EI_{ef} = \sum_i (E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2), \quad (40)$$

kjer E_i predstavlja modul elastičnosti lesa vzporedno z vlakni, A_i površino, I_i pa upogibni vztrajnostni moment i -tega podprereza glede na njegovo težišče. a_i opiše oddaljenost težišča i -tega podprereza od težišča sestavljenega prereza, γ_i pa že omenjeno podajnost stika dveh sosednjih podprerezov. Pri tem se za osrednji podprerez slojevitnega nosilca, ki ga označuje indeks 2, privzame številčna vrednost $\gamma_2=1$. Oddaljenost težišča podprereza 2 od skupnega težišča sestavljenega prereza se izvede, kot sledi:

$$a_2 = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 (h_1 + h_2) - \gamma_3 E_3 A_3 (h_2 + h_3)}{2 \sum_i \gamma_i E_i A_i}. \quad (41)$$

Pri tem h_1 , h_2 in h_3 označujejo višine posameznih podprerezov slojevitnega nosilca.

Za podprereza označena z indeksoma $i=1$ in 3 se vrednost parametra γ , ki opisuje podajnost stika sosednjih podprerezov, izračuna po naslednji enačbi:

$$\gamma_i = \left(1 + \frac{\pi^2 E_i A_i s_i}{K_i L^2} \right)^{-1}, \quad (42)$$

kjer L opisuje razpon slojevitnega prostoležečega nosilca (za kontinuirne slojevite nosilce Evrokod 5 (SIST, 2005) predlaga efektivni razpon $0,8L$, za previsne nosilce pa $2L$, kjer L predstavlja dolžino razpona kontinuirnega nosilca oziroma dolžino previsa konzolnega nosilca), s_i je razmak veznih sredstev vzdolž stika podprerezov ter K_i modul zdrsa veznega sredstva (npr. za lesne vijake v mejnem stanju uporabnosti $K_i = K_{ser} = \frac{\rho_k^{1.5} d}{23} \left[\frac{N}{mm^2} \right]$).

$\rho_k \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ je karakteristična gostota lesa, d [mm] pa premer veznega sredstva, v mejnem stanju nosilnosti $K_u = \frac{2}{3} K_{ser}$.

V primeru, da prečni prerez sestavljata le dva podprereza, v enačbi (41) upoštevamo $h_3=0$ ter $\gamma=0$.

3.3 Potek napetosti po sestavljenem lesenem prečnem prerezu

V nadaljevanju prikažemo izraze za izračun normalnih in največje strižne napetosti v sestavljenem lesenem prečnem prerezu ter izraz za izračun strižne napetosti na stiku slojev sestavljenega lesenega nosilca, kot jih predlaga standard Evrokod 5 (SIST, 2005).

3.3.1 Normalne napetosti

Z uporabo enačb

$$\sigma_i = \frac{\gamma_i E_i a_i M_{Ed}}{EI_{ef}} \quad \text{in}$$

$$\sigma_{m,i} = \frac{0.5 E_i h_i M_{Ed}}{EI_{ef}} \quad (43)$$

izračunamo normalne napetosti. Pri tem je σ_i normalna napetost v težišču, $\sigma_i \pm \sigma_{m,i}$ pa normalna napetost na robovih i -tega podprereza.

3.3.2 Strižne napetosti

Največja strižna napetost v lesenem sestavljenem prerezu nastopi v njegovem težišču, torej na mestu, kjer so normalne napetosti enake 0. Izračunamo jo s pomočjo izraza:

$$\tau_{xz,MAX} = \frac{\gamma_3 E_3 A_3 a_3 + 0.5 E_2 b_2 h_2^2}{b_2 EI_{ef}} V_{Ed} \quad (44)$$

Števec v enačbi (44) predstavlja zmnožek elastičnih modulov lesa podprerezov ter statičnega momenta spodnje/zgornje polovice sestavljenega prečnega prereza glede na težišče sestavljenega prereza. Zaradi nerazumevanja izraza v števcu enačbe (44) in nedosegljivosti teoretičnih podlag, na osnovi katerih je bila ta enačba izpeljana, predlagamo, skladno z osnovami teorije mehanike nosilcev (Srpčič, 2003) ter ob sočasnem upoštevanju parametra γ_i , ki definira podajnost stika sosednjih podprerezov, modificirano enačbo za izračun največje strižne napetosti v težišču sestavljenega lesenega prereza, ki se glasi:

$$\tau_{xz,MAX,modificirano} = \frac{V_{Ed} S}{b I} = \frac{\gamma_1 E_1 S_1 + E_2 S_2}{b_2 E_{ef}} V_{Ed} = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 a_1 + 0,5 E_2 b_2 (0,5 h_2 - a_2)^2}{b_2 E_{ef}} V_{Ed} \quad (45)$$

Z razumevanjem osnov enačbe (45) je mogoče izračunati strižno napetost τ_{xz} tudi v poljubnem vlaknu sestavljenega lesenega prečnega prereza.

4 • RAČUNSKI PRIMER

Na računskem primeru značilnega dvoslojnega lesenega kompozitnega nosilca predstavimo študijo vpliva podajnosti stika med slojema na strižne napetosti na stiku slojev ter v prečnih prerezih kompozitnega nosilca. Strižne napetosti, izračunane z razvitim matematičnim modelom z analitično rešitvijo, primerjamo s strižnimi napetostmi, ki jih izvednotimo z računsko metodo skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005) ter predlagano modificirano enačbo tega standarda.

4.1 Osnovni podatki kompozitnega nosilca

Osnovne geometrijske in materialne podatke ter podatke o obtežbi obravnavanega dvoslojnega kompozitnega nosilca prikazujemo na sliki 3.

Obravnavani kompozitni nosilec pogosto zasledimo pri prenovah starejših objektov, kjer je mogoče obstoječim lesnim stropnikom dodati nov zgornji leseni ojačilni sloj medetažne konstrukcije. Leseni nosilec premošča razpon 500 cm in je obremenjen z enakomernima zvezno razporejenima prečnima obtežbama (stalna $g = 3.2 \text{ kN/m}^1$, spremenljiva $q = 2$

3.3.3 Strižna napetost na stiku podprerezov in strižna obremenitev veznih sredstev

Strižna napetost na stiku dveh sosednjih podprerezov se izračuna s pomočjo naslednje enačbe:

$$p_{x,i} = \tau_{xz,i} = \frac{\gamma_i E_i A_i a_i}{E_{ef} b_2} V_{Ed}, \quad (46)$$

posledično pa tudi strižna obremenitev posameznega veznega sredstva kot:

$$F_i = \tau_{xz,i} s_i b_2 = \frac{\gamma_i E_i A_i a_i s_i}{E_{ef}} V_{Ed} \quad (47)$$

($i=1$ za stik podprerezov 1 in 2, $i=3$ za stik podprerezov 2 in 3).

Pri tem dodajmo, da računska metoda skladno z Evrokodom 5 (SIST, 2005) omogoča le ravninsko obravnavo kompozitnega nosilca. Razviti matematični model pa omogoča, seveda ob upoštevanju omejitev predstavljenih v poglavju 2, kompozitni nosilec obravnavati prostorsko, torej z upoštevanjem ekscentričnega delovanja obtežb q_y in q_z . Da je v nadaljevanju mogoča primerjava nekaterih rezultatov, pridobljenih po obeh metodah, tudi v izračunih z razvitim matematičnim modelom, upoštevamo prijemališče obtežb q_y in q_z v težišču slojevitiga prečnega prereza, kot jih narekuje obravnava lesenih kompozitnih nosilcev skladno z Evrokodom 5 (SIST, 2005).

4.2 Največje strižne napetosti na stiku lesenih slojev

V preglednici 2 prikazemo, v odvisnosti od razmaka vgrajenih veznih sredstev vzdolž stika, poleg največje strižne napetosti na stiku lesenih slojev $p_{x,MAX}$, tudi mejno dovoljeno strižno napetost na stiku $p_{x,MEJNO}$, ki jo pogojuje nosilnost izbranega veznega sredstva (standardni lesni vijak 6/120 mm).

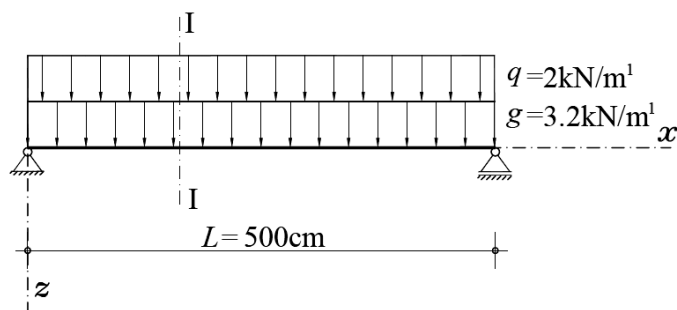
Računska analiza mejnega stanja nosilnosti skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005) pokaže, da bi bilo treba vezna sredstva, vgrajena v dveh vzporednih vrstah, razporediti na medosnih

kN/m^1). V konkretnem računskem primeru predpostavimo, da navedeni obtežbi delujeta v smeri y in z , njuno prijemališče se nahaja na zgornjem desnem vogalu sestavljenega prereza, torej ekscentrično glede na težišče lesenega sestavljenega prereza (slika 3).

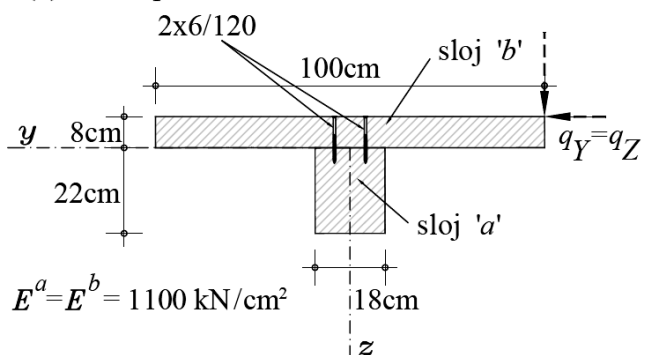
Prerez sestavljata lesena podprereza: (i) spodnji podprerez širine 18 cm in višine 22 cm ter (ii) zgornji podprerez širine 100 cm in višine 8 cm. Lesena sloja sta preko stične površine medsebojno povezana z vgrajenimi standardnimi lesnimi vijaki 6/120 mm, ki so vzdolž nosilca razporejeni na enakomernih medsebojnih razdaljah, v dveh vzporednih vrstah. Oba sloja nosilca sta izdelana iz lesa enakih mehanskih lastnosti, $E^a = E^b = 1100 \text{ kN/cm}^2$.

V nadaljevanju prikazemo rezultate analiz po računski metodi iz Evrokoda 5 (SIST, 2005) ter rezultate, dobljene z razvitim in v poglavju 2 predstavljenim matematičnim modelom za analizo slojevitih kompozitnih nosilcev. Primerjavo rezultatov obeh računskih postopkov opravimo za različne razporeditve veznih sredstev vzdolž stika lesenih slojev.

(a) Geometrija, obtežba in računski model



(b) Prečni prerez I-I:



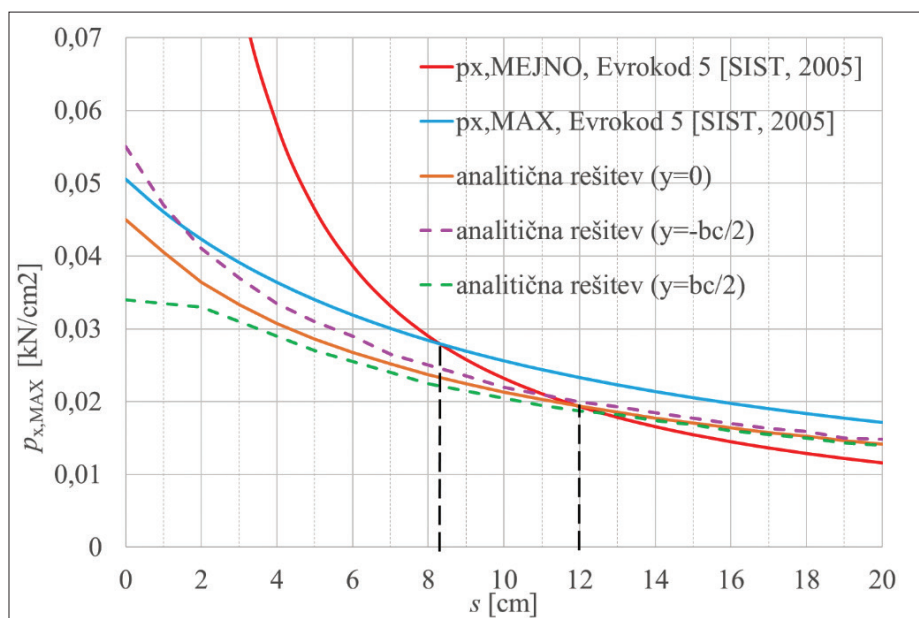
Slika 3 • Osnovni podatki obravnavanega dvoslojnega lesenega kompozitnega nosilca.

razmak veznih sredstev (cm)	(SIST, 2005)			Analitična rešitev	
	$p_{x,MEJNO}$ (kN/cm ²)	$p_{x,MAX}$ (kN/cm ²)	izkoriščenost VS (%)	$p_{x,MAX}$ (kN/cm ²)	izkoriščenost VS (%)
6	0,0387	0,0319	83	0,0268	69
8	0,0290	0,0284	98	0,0237	82
10	0,0232	0,0256	110	0,0213	92
12	0,0193	0,0233	121	0,0194	100
20	0,0116	0,0171	148	0,0171	147

Preglednica 2 • Strižne napetosti na stiku podprerezov ter izkoriščenost veznih sredstev (VS).

razdaljah 8 cm vzdolž osi slojevitega lesenega nosilca. Glede na rezultate razvitega matematičnega modela za analizo slojevitih nosilcev

Na sliki 4 so prikazane tudi največje strижne napetosti na stiku lesenih slojev, ki smo jih izvednotili z razvitim matematičnim modelom



Slika 4 • Strižne napetosti na stiku lesenih slojev, izračunane z razvitim matematičnim modelom in po metodi (SIST, 2005), v odvisnosti od razmaka veznih sredstev.

pa ugotavljamo, da bi bilo mogoče vezna sredstva vgraditi na večjih medosnih razdaljah vzdolž stika podprerezov, in sicer na medosnih razdaljah 12 cm. Če bi bila vezna sredstva razporejena skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005), bi bila njihova izkoriščenost le 82 %.

Gornje ugotovitve prikažemo tudi na sliki 4. Odčitek presečišča krivulje $p_{x,MAX,Evrokod5(SIST,2005)}$ oziroma poteka rezultatov razvitega matematičnega modela s krivuljo dovoljenih mejnih vrednosti obremenitev veznih sredstev $p_{x,MEJNO,Evrokod5(SIST,2005)}$ na abscisni osi, podaja še dovoljen razmak veznih sredstev vzdolž stika slojev, da njihova nosilnost, skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005), ni prekoračena.

na obeh robovih ter na sredini strične površine slojev. Še posebej pri manjših razmakih veznih sredstev je razvidno, da vrednost strижnih napetosti $p_{x,MAX}$ prečno na stik slojev, ni enakomerna.

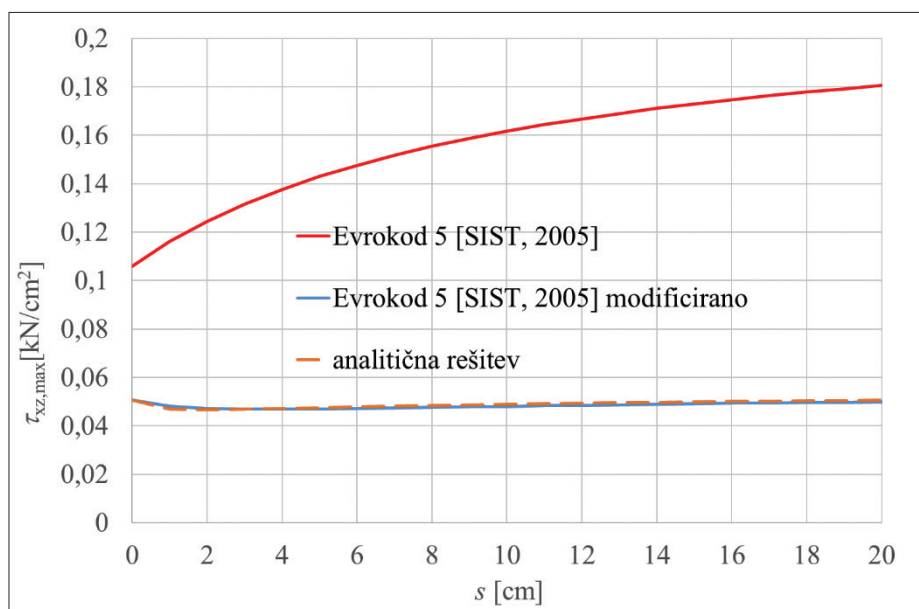
4.3 Največje strижne napetosti v prečnem prerezu slojevitega nosilca

V preglednici 3 primerjamo največje strижne napetosti v prečnem prerezu ob podpori slojevitega nosilca, izračunane skladno z enačbo (44) iz Evrokoda 5 (SIST, 2005), predlagano modifikacijo te enačbe (enačba(45)) ter največjo strижno napetost izvednoteno z razvitim matematičnim modelom za analizo slojevitih kompozitnih nosilcev. Največja strижna napetost nastopi v spodnjem podprerezu sestavljenega nosilca. Podamo tudi oddaljenost mesta največje strижne napetosti od strične površine slojev. Največje strижne napetosti ter njihovo lego prikažemo za različne razmake veznih sredstev vzdolž stika slojevitega nosilca.

Ugotavljamo, da se vrednosti največjih strижnih napetosti v lesenih podprerezih, izračunane z modificirano enačbo (45) po Evrokod 5 (SIST, 2005), ter vrednosti izvednotene z razvitim matematičnim modelom dobro ujemajo. Z uporabo osnovne enačbe (44) za izračun največjih strижnih napetosti skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005) so vrednosti največjih strижnih napetosti nekajkrat višje kot v primeru uporabe modificirane enačbe (45). Ugotavljamo tudi, da legi največje strижne napetosti v primeru toge ter povsem podajne povezave slojev skladno z Evrokod 5 (SIST, 2005) ter razvitim matematičnim modelom praktično sovpadajo. Pri vmesnih togostih stika pa se lega največje strижne napetosti po metodi Evrokod 5 (SIST, 2005) nahaja nekoliko bližje stiku kot v primeru izračuna po predstavljenem matematičnem modelu z analitično rešitvijo.

razmak veznih sredstev s (cm)	(SIST, 2005)			Analitična rešitev	
	$\tau_{xz,MAX}$ (kN/cm ²)	$\tau_{xz,MAX}$ modificirano (kN/cm ²)	lega $\tau_{xz,MAX}$ (cm)	$\tau_{xz,MAX}$ (kN/cm ²)	lega $\tau_{xz,MAX}$ (cm)
toga povezava	0,1061	0,0507	1,0	0,0507	1,0
6	0,1476	0,0471	7,7	0,0478	8,8
8	0,1554	0,0476	8,5	0,0484	9,2
10	0,1617	0,0480	8,9	0,0489	9,4
12	0,1668	0,0485	9,2	0,0493	9,6
20	0,1805	0,0499	9,8	0,0506	10,1
povsem podajna povezava	0,2188	0,0547	11,0	0,0547	11,0

Preglednica 3 • Vrednosti in lega največje strижne napetosti v sestavljenem lesenem prerezu.

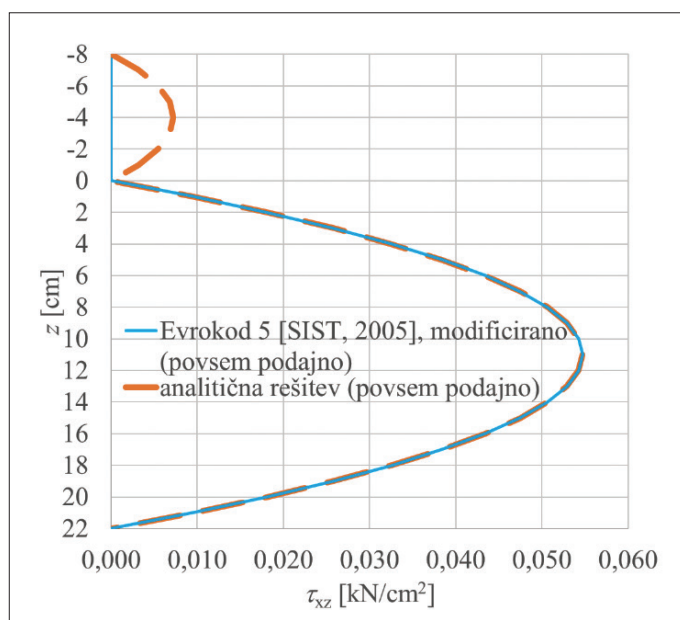
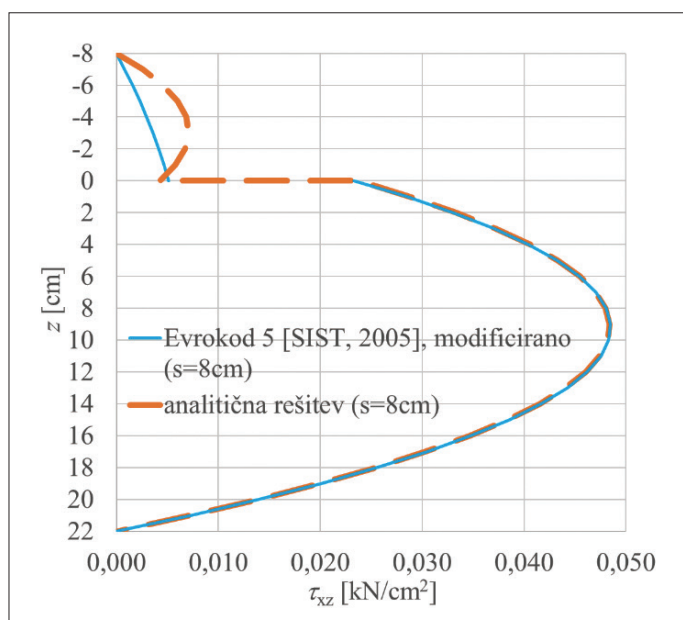


Slika 5 • Vrednost največje strižne napetosti v sestavljenem lesenem prečnem prerezu glede na predpostavljeni razmak veznih sredstev vzdolž stika slojev in uporabljeno računsko metodo.

Odstopanja v vrednostih največjih strižnih napetosti v sestavljenem lesenem prečnem prerezu obravnavanega kompozitnega nosilca, ki smo jih izračunali z računsko metodo

Evrokod 5 (SIST, 2005), s predlagano modificirano enačbo tega standarda (45) ter z razvitim matematičnim modelom predstavimo grafično tudi na sliki 5.

Vrednosti in potek strižnih napetosti po prečnem prerezu ob podpori slojevitega lesenega nosilca, izračunanih z modificirano enačbo (45) ter razvitim matematičnim modelom, za dva različna razmaka veznih sredstev vzdolž stika slojevitega nosilca prikažemo na slikah 6 in 7. Vrednosti ter razporeditev strižnih napetosti v spodnjem podprerezu lesenega slojevitega nosilca se dobro ujemajo. V zgornjem podprerezu pa opazimo bistvena odstopanja tako v vrednostih kot poteku strižnih napetosti. Ob uporabi modificirane enačbe za izračun strižnih napetosti (45) se izkaže, da v primeru povsem podajne povezave slojev, zgornji podprez sploh ni strižno obremenjen. Takšni rezultati ne vzdržijo presoje osnov mehanike nosilcev (Srpčič, 2003). S pristopom k analizi slojevitih nosilcev, kot ga predlaga Evrokod 5 (SIST, 2005), kljub modifikaciji enačbe za izračun strižnih napetosti v prečnem prerezu (glej enačbo (45)), ta ni primerljiv s predstavljenim matematičnim modelom glede poteka strižnih napetosti v zgornjem podprerezu.



Slika 6, 7 • Vrednosti in potek strižnih napetosti po lesenih podprerezih skladno z modificirano enačbo (45) ter razvitim matematičnim modelom ($s = 8$ cm ter povsem podajna povezava slojev).

5 • SKLEP

V prispevku smo predstavili nov matematični model in pripadajočo analitično rešitev za analizo mehanskega obnašanja prostorskih

dvoslojnih kompozitnih nosilcev s podajno povezavo med slojema. Prikazali smo tudi računsko metodo za analizo ravninskih sloje-

vitih lesenih nosilcev s podajno povezavo slojev skladno s standardom Evrokod 5 (SIST, 2005) ter predlagali modificirano enačbo omenjenega standarda za izračun največjih strižnih napetosti v prečnih prerezih tovrstnih nosilcev.

Primerjavo predstavljenih računskih metod slojevitih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji smo izvedli na dvoslojnim lesenem prostoležečem nosilcu, ki je obremenjen z enakomerno ekscentrično zvezno prečno obtežbo. Pri tem smo se še posebej posvetili problematiki strižnih napetosti v prečnih prerezih slojevitiga lesenega nosilca. Ugotavljamo, da:

- so izračunane največje strižne napetosti v prečnem prerezu lesenega slojevitiga nosilca skladno s standardom za lesene konstrukcije Evrokod 5 (SIST, 2005) tudi do nekajkrat večje, kot so izračunane strižne napetosti s predstavljenim matematičnim modelom,

- je predlagana modificirana enačba standarda Evrokod 5 (SIST, 2005) za izračun največjih strižnih napetosti v prečnem prerezu lesenega slojevitiga nosilca bistveno natančnejša, kot je osnovna enačba omenjenega standarda,
- se z uporabo omenjene modificirane enačbe po standardu Evrokod 5 (SIST, 2005) potek strižnih napetosti v osrednjem prerezu slojevitiga lesenega nosilca praktično povsem sklada s potekom strižnih napetosti, kot jih izračunamo z razvitim matematičnim modelom,
- navedenega v predhodni alineji ne moremo trditi za podprereze lesenih slojevitih nosilcev, ki so podajno povezani

z osrednjim podprerezom slojevitiga nosilca,

- bi glede na rezultate razvitega matematičnega modela bilo mogoče vezna sredstva vzdolž stika slojev razporediti na večjih medsebojnih oddaljenostih, kot nakazujejo rezultati računskih analiz po Evrokodu 5 (SIST, 2005).

Dodajamo tudi, da je prikazani matematični model z analitično rešitvijo mogoče uporabiti tudi za verifikacijo drugih razvitih računskih metod in modelov za obravnavo deformacijsko-napetostnega stanja prostorskih dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema.

6 • ZAHVALA

Predstavljeni rezultati so pridobljeni v sklopu dela programske skupine Mehanika konstrukcij (P2-0260), ki ju financira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije. Za finančno pomoč se jih iskreno zahvaljujemo.

7 • LITERATURA

- Adekola, A., Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam, *International Journal of Solids and Structures*, 4:1125–35, 1986.
- Campi, F., Monetto, I., Analytical solutions of two-layer beams with interlayer slip and bi-linear interface law, *International Journal of Solids and Structures*, 50:687–98, 2013.
- Challamel, N., Girhammar, U.A., Lateral-torsional buckling of vertically layered composite beams with interlayer slip under uniform moment, *Engineering Structures*, 34:505–13, 2012.
- Challamel, N., Girhammar, U.A., Lateral-torsional buckling of partially composite horizontally layered or sandwich-type beams under uniform moment, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 139(8):1047–64, 2013.
- Čas, B., Planinc, I., Schnabl, S., Analytical solution of three-dimensional two-layer composite beam with interlayer slips, *Engineering Structures*, 173:269–82, 2018.
- Ecsedi, I., Baksa, A., Analytical solution for layered composite beams with partial shear interaction based on Timoshenko beam theory, *Engineering Structures*, 115:107–17, 2016.
- Faella, C., Martinelli, E., Nigro, E., Steel-concrete composite beams in partial interaction: closed-form exact expression on the stiffness matrix and the vector of equivalent nodal forces, *Engineering Structures*, 32:2744–54, 2010.
- Foraboschi, P., Analytical solution of two-layer beam taking into account nonlinear interlayer slip, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 135(10):1129–46, 2009.
- Girhammar, U.A., Gopu, V.K.A., Composite beam-columns with inter-layer slip-exact analysis, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 199(4):1265–82, 1993.
- Girhammar, U.A., A simplified analysis method for composite beams with interlayer slip, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:515–30, 2009.
- Goodman, J.R., Popov, E.P., Layered beams systems with inter-layer slip, *Journal of the Structural Division ASCE*, 94(11):2535–47, 1986.
- Kroflič, A., Planinc, I., Saje, M., Čas, B., Analytical solution of two-layer beam including interlayer slip and uplift, *Structural Engineering and Mechanics*, 34(6):667–83, 2010.
- Lenci, S., Clementi, F., Effects of shear stiffness, rotatory and axial inertia, and interface stiffness on free vibrations of a two-layer beam, *Journal of Sound and Vibration*, 331:5247–67, 2012.

- Lin, J.P., Wang, G., Bao, G., Xu, R., Stiffness matrix for the analysis and design of partial- interaction composite beams, *Construction and Building Materials*, 156:761–72, 2017.
- Martinelli, E., Nguyen, Q.H., Hjjaj, M., Dimensionless formulation and comparative study of analytical models for composite beams in partial interaction, *Journal of Constructional Steel Research*, 75:21–31, 2012.
- Monetto, I., Analytical solutions of three-layer beams with interlayer slip and step-wise linear interface law, *Composite Structures*, 120:534–51, 2015.
- Newmark, N.M., Siest, C.P., Viest, C.P., Test and analysis of composite beams with in- complete interaction, *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, 1:75–92, 1951.
- Ranzi, G., Bradford, M.A., Analytical solutions for the time-dependent behaviour of composite beams with partial interaction, *International Journal of Solids and Structures*, 43:3770–93, 2006.
- Schnabl, S., Saje, M., Turk, G., Planinc, I., Analytical solution of two-layer beam taking into account interlayer slip and shear deformation, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 133(6):886–94, 2007.
- Schnabl, S., Planinc, I., Exact buckling loads of two-layer composite Reissner's columns with interlayer slip and uplift, *International Journal of Solids and Structures*, 50:30–7, 2013.
- Shen, X., Chen, W., Wu, Y., Xu, R., Dynamic analysis of partial-interaction composite beams, *Composites Science and Technology*, 71:1286–94, 2011.
- Simo, J.C., A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem, Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:55–70, 1985.
- SIST, SIST EN 1995-1-1:2005, Evrokod 5: Projektiranje lesenih konstrukcij-1-1. del: Splošna pravila in pravila za stavbe, 2005.
- Sousa, J.B.M., Silva, A.R., Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip, *Engineering Structures*, 32:1671–80, 2010.
- Srpčič, S., *Mehanika trdnih teles*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2003.
- Wolfram, S., *Mathematica*, Addison-Wesley Publishing Company, 2017.
- Wu, P., Zhou, D., Liu, W., Wan, L., Liu, D., Elasticity solution of two-layer beam with a viscoelastic interlayer considering memory effect, *International Journal of Solids and Structures*, 94–95:76–86, 2016.
- Xu, R., Wang, G., Bending solutions of the Timoshenko partial-interaction composite beams using Euler-Bernoulli solutions, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 139(11):1881–5, 2013.