

# UKLON VITKIH OKROGLIH DVOCEVNIH SOVPREŽNIH STEBROV Z BETONSKIM JEDROM OB UPOŠTEVANJU ZDRSOV MED SLOJI

## BUCKLING CAPACITY OF SLENDER CONCRETE FILLED DOUBLE SKIN STEEL TUBULAR COLUMNS CONSIDERING INTERFACE SLIPS

dr. Bojan Čas, univ. dipl. inž. grad.

bojan.cas@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo  
in geodezijo,  
Jamova 2, 1000 Ljubljana

Znanstveni članek

UDK 004.42:624.012.4

**Povzetek** | V prispevku predstavimo nov matematični model za izračun kritične uklonske sile vitkih okroglih dvocevniH sovprežnih stebrov z betonskim jedrom in upoštevanjem zdrsa med jeklom in betonom. V angleškem govornem področju se tovrstne konstrukcije poimenujejo »concrete filled double-skin tubular columns« in se običajno označijo s kratico CFDST, ki jo uporabimo tudi v tem prispevku. Razviti računski model nam omogoča analizo vpliva različnih osnovnih parametrov na vrednost uklonske sile CFDST-stebrov. Izkaže se, da je uklonska sila tovrstnih stebrov neodvisna od vzdolžne togosti stika med jeklenim in betonskim delom sovprežnega prečnega prereza, medtem ko prečna togost stika podprerezov pomembno vpliva na vrednost kritične uklonske sile. Z naraščanjem vrednosti prečne togosti stika narašča tudi vrednost uklonske sile. Pokažemo tudi, da analitična vrednost kritične uklonske sile razvitega računskega modela dobro sovpada z rezultati eksperimentalnih in numeričnih raziskav drugih raziskovalcev, če v računskih postopkih uporabimo kalibrirane vrednosti prečne togosti stika med jeklenima cevema in betonskim jedrom CFDST-stebrov. S parametričnimi študijami pokažemo tudi, da prečna togost stika, kot je bila dosežena v primerih realnih, testom podvrženih CFDST-stebrov, zavzema številčno relativno nizke vrednosti.

Ključne besede: uklon, kompoziti jekla in betona, zdrs, stebri

**Summary** | In this paper, a novel mathematical model for the global buckling behaviour of slender concrete-filled double-skin tubular columns (CFDST) with finite compliance between the steel tubes and a sandwiched concrete core is derived for the first time. The model is capable to investigate the influence of various basic parameters on the critical buckling loads of CFDST columns. It is shown that the elastic buckling load of circular and slender CFDST columns is independent of the contact stiffness in the longitudinal direction, but on the other hand, it can strongly depend on the contact stiffness in the circumferential direction. Increasing the contact stiffness in the circumferential direction increases the critical buckling load. It is also shown that the analytical results agree well with the experimental and numerical results when the calibrated values of the circumferential contact stiffness are used in the calculations. Moreover, it is shown that the contact between the steel tubes and a sandwiched concrete core of the tested large sized CFDST columns used for comparison is relatively weak.

Key words: buckling, CFDST, slip, column

## 1 • UVOD

Dvocevni okrogli sovprežni stebri z betonskim jedrom (CFDST) se danes pogosto uporabljajo v najrazličnejših inženirskih konstrukcijah. Tako so vgrajeni kot stebri v konstrukcijah infrastrukturnih objektov kot npr. v obalnih konstrukcijah, kot stebri premostitvenih objektov cestne in železniške infrastrukture, v konstrukcijah globokega temeljenja večnadstropnih zgradb, podpornih stebrov vetrnih elektrarn itd. Primerno konstruirani in dimenzionirani CFDST-stebri lahko imajo precej prednosti pred klasičnimi jeklenimi ali armiranobetonskimi stebri, kot so npr. ugodnejše razmerje med težo ter togostjo njihovih prečnih prereзов, večja osna nosilnost, togost, duktilnost, odpornost proti seizmičnim kot tudi požarnim obremenitvam ter številne druge. Poudariti je treba, da je uporaba CFDST-stebrov tudi ekonomsko precej ugodna, saj jeklene cevi med gradnjo prevzamejo funkcijo opažev, ki kot strošek gradnje tako odpadejo, prav tako pa je tovrstna gradnja hitra.

V preteklosti je bilo opravljenega veliko znanstvenoraziskovalnega dela z namenom boljšega razumevanja obnašanja predstavljenih kompozitnih CFDST-stebrov. Obširne eksperimentalne raziskave so predstavili Elchalakani, Tao, Han, Yang in Essopjee s sodelavci ((El-

chalakani, 2002), (Tao, 2004), (Han, 2004), (Yang, 2012), (Essopjee, 2015)) ter številni drugi. Numerične študije tovrstnih stebrov so predmet znanstvenoraziskovalnega dela avtorjev Huanga s sodelavci ((Huang, 2010), Hu in Su (Hu, 2011), Pagouladou s sodelavci (Pagouladou, 2014), Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014)). Analitične računske postopke sta predstavila Tan in Zhang (Tan, 2010).

Večina omenjenih študij se je omejila predvsem na obnašanje kratkih CFDST-stebrov, pri katerih porušitev stebra običajno nastopi zaradi tlačne porušitve betonskega dela kompozitnega prereza, ki ga spremlja tudi lokalna izbočitev ter plastifikacija pločevine jeklenih cevi. Obnašanje kratkih in vitkih CFDST-stebrov pa se medsebojno precej razlikuje, saj je porušni mehanizem vitkih stebrov običajno povezan z njihovo stabilnostjo, ki ga predstavlja njihov globalni uklon. V znanstveni literaturi so poročila o eksperimentalnih preiskavah vitkih CFDST-stebrov precej redka, na primer Tao s sodelavci ((Tao, 2004), Essopjee ter Dundu (Essopjee, 2015), Romero s sodelavci (Romero, 2015)). Podobno ugotavljamo tudi za numerične analize vitkih CFDST-stebrov, ki sta jih obravnavala na primer Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014). Glede na dostopno

znanstveno literaturo ocenjujemo, da analitični računski model za analizo globalnega uklona vitkih dvocevni okroglih sovprežnih stebrov z betonskim jedrom (CFDST), ki je predmet pričujočega prispevka, do sedaj še ni bil predstavljen.

Glede na navedeno predstavlja bistvo prispevka predstavitev novega matematičnega modela s pripadajočo analitično rešitvijo za določitev kritične uklonske sile vitkih dvocevni okroglih sovprežnih stebrov z betonskim jedrom (CFDST) ob upoštevanju možnosti razslojevanja okroglih jeklenih cevi in betonskega jedra. Vsebinska prispevka predstavlja nadaljevanje znanstvenoraziskovalnega dela, ki sta ga Schnabl in Planinc ((Schnabl, 2015), (Schnabl, 2017), (Schnabl, 2019)) predstavila na področju obnašanja vitkih okroglih jeklenih sovprežnih stebrov z betonskim jedrom.

V tretjem poglavju z naslovom Rezultati in diskusija predstavimo primerjavo analitičnih rezultatov razvitega matematičnega modela z eksperimentalno pridobljenimi vrednostmi uklonskih obtežb CFDST-stebrov, kot jih v prispevkih navajajo Tao (Tao, 2004) in Essopjee in Dundu (Essopjee, 2015). Analitično pridobljene vrednosti uklonskih obtežb vitkih CFDST-stebrov primerjamo tudi z numeričnimi rešitvami avtorjev Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014) ter z rezultati, ki sta jih navedena avtorja izračunala upoštevaje standarde ((CEN, 1992) in (AISC, 2010)).

| Oznake:                     |                                                                                     | $P, P_{cr,AN}$                                                                                                        | osna obremenitev in analitično določena kritična osna sila                                                                                              |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A^{so}, A^{si}, A^c$       | površina prečnih prereзов zunanje in notranje jeklene cevi ter betonskega jedra     | $P_{ul,MKE}, P_{EC4}, P_{AISC}$                                                                                       | kritična osna sila izračunana z MKE ter skladno s (CEN, 1992) in (AISC, 2010)                                                                           |
| $D^{so}, D^{si}$            | zunanj premer zunanje in notranje jeklene cev                                       | $p_X, p_Z$                                                                                                            | komponenti strižne napetosti na stiku slojev v smeri $X$ in $Z$                                                                                         |
| $E^{so}, E^{si}, E^c$       | modul elastičnosti materiala zunanje in notranje jeklene cevi ter betonskega jedra  | $R_X, R_Z$                                                                                                            | komponenti ravnotežne sile prečnega prereza v smeri $X$ in $Z$                                                                                          |
| $I^{so}, I^{si}, I^c$       | upogibni vztrajnostni momenti zunanje in notranje jeklene cevi ter betonskega jedra | $u_X, u_Z$                                                                                                            | osni in prečni pomik CFDST-stebra                                                                                                                       |
| $K_X, K_Z$                  | togost stika v vzdolžni ter prečni smeri CFDST-stebra                               | $\Delta_X, \Delta_Z$                                                                                                  | zdrs v smeri osi $X$ in $Z$                                                                                                                             |
| $L$                         | dolžina CFDST-stebra                                                                | $\epsilon^{so}, \epsilon^{si}, \epsilon^c, \kappa^{so}, \kappa^{si}, \kappa^c, \varphi^{so}, \varphi^{si}, \varphi^c$ | specifična sprememba dolžine materialnega vlakna v smeri osi $X$ , psevdoukrivljenosti ter zasuki zunanje in notranje jeklene cevi ter betonskega jedra |
| $M_Y^{so}, M_Y^{si}, M_Y^c$ | upogibni momenti zunanje in notranje jeklene cevi ter betonskega jedra              | $\lambda$                                                                                                             | vitkost CFDST-stebra                                                                                                                                    |
| $N_{test}$                  | eksperimentalna osna nosilnost CFDST-stebra                                         | $out, in$                                                                                                             | zunanj, notranj                                                                                                                                         |

Preglednica 1 • Pomen oznak.

## 2 • OSNOVNE ENAČBE

### 2.1 Uvod

Na sliki 1 je prikazana nedeformirana in deformirana oblika okroglega jeklenega dvocevne- nega sovprednega stebra z betonskim jedrom (CFDST), na sliki 2 pa njegov karakteristični prečni presek. Obravnavani stebel ima začetno dolžino  $L$ . Sestavljata ga zunanja ( $so$ ) in notranja ( $si$ ) jeklena cev z dolžinama  $L^{so}$  in  $L^{si}$  ter vmesno betonsko jedro ( $c$ ), ki je dolžine  $L^c$ .

vativno tlačno osno silo  $P$ , ki deluje v težišču sovprednega prečnega prereza.

### 2.2 Predpostavke matematičnega modela

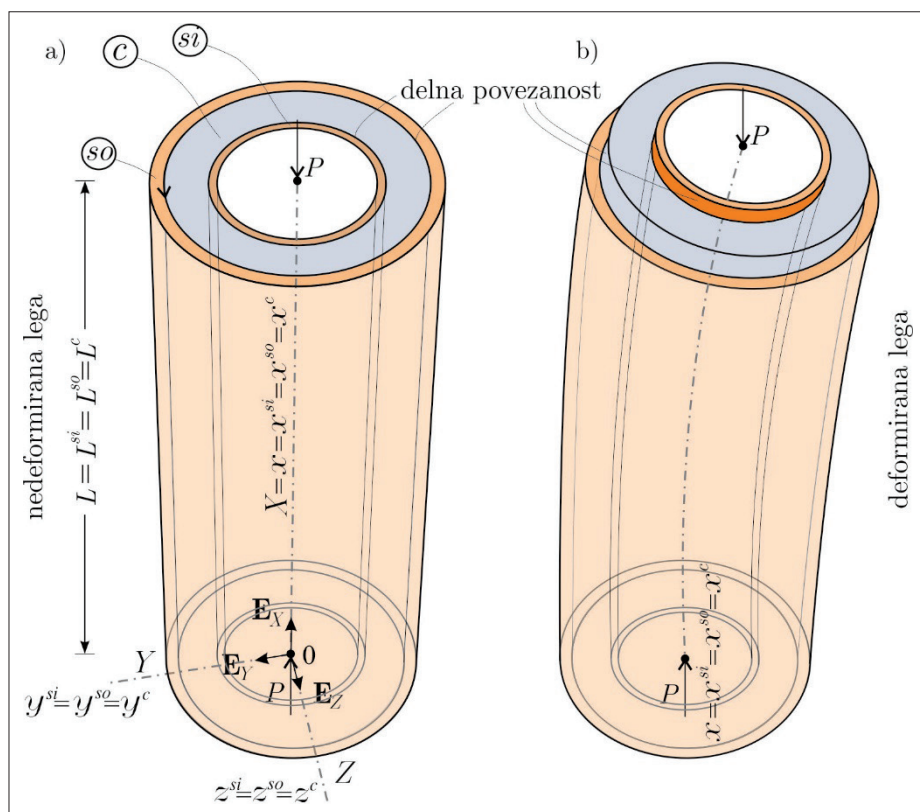
Osnovne predpostavke pri izpeljavi osnovnih enačb predstavljenega matematičnega modela CFDST-stebrov so:

1. materiali jeklenih cevi ter betonskega jedra so homogeni, izotropni ter linearno elastični,

2. obnašanje jeklenih cevi ter betonskega jedra CFDST-stebrov opišemo z linearizirano Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev (Reissner, 1972),
3. jeklene cevi in betonsko jedro so zvezno medsebojno povezani na način, da med njimi lahko nastopijo relativni zamiki oziroma zdrsi,
4. zdrsi med betonskim jedrom in jeklenimi cevmi so majhni,
5. materialni zakon stika med betonskim jedrom in kovinskimi cevmi je linearno elastičen,
6. vpliv strižnih deformacij na mehansko obnašanje CFDST-stebrov je zanemarljiv,
7. zanemarljeni so toplotni vplivi, reološki pojavi, začetne zaostale napetosti, izbočitev prečnih prerezov ter imperfekcije CFDST-stebrov ali obtežbe,
8. porušni mehanizem CFDST-stebrov predstavlja njihov globalni uklon.

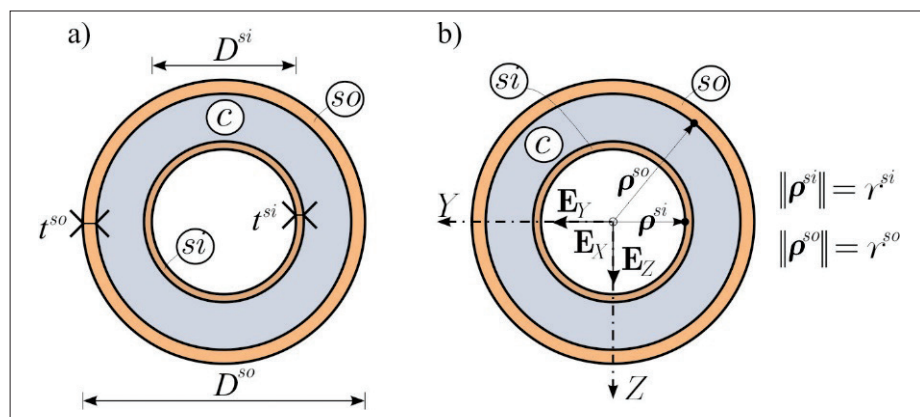
### 2.3 Osnovne enačbe tlačno obremenjenih CFDST-stebrov

Osnovne matematične enačbe tlačno obremenjenih CFDST-stebrov s podajno povezavo med jeklenima cevema in betonskim jedrom predstavlja sistem linearnih diferencialno algebrskih enačb prvega reda (1)–(6). V nadaljevanju dodamo oznakam količin indekse  $(\bullet)^i$ , kjer indeks  $i=so,si,c$  označuje, kateremu izmed slojev količina pripada. Na podoben način je treba razumeti tudi oznako  $(\bullet)'=d(\bullet)/dx$ , ki predstavlja odvod količine  $(\bullet)$  glede na materialno koordinato  $x$ . Sistem osnovnih diferencialno algebrskih enačb (1)–(6), s katerim opišemo fenomen uklona tlačno obremenjenih CFDST-stebrov s podajno povezavo slojev, sestavljajo: kinematične (1), ravnotežne (2) ter konstitucijske enačbe (3) in vezne enačbe (4) s pripadajočimi statičnimi oziroma kinematičnimi robnimi pogoji vsakega izmed slojev (5) in (6).



Slika 1 • Shematski prikaz okroglega jeklenega dvocevne- nega sovprednega stebra z betonskim jedrom (CFDST) s podajnim stikom med zunanjo in notranjo jekleno cevjo in betonskim jedrom a) nedeformirana oblika, b) deformirana (izklonjena) oblika.

Zunanja premera votlih jeklenih cevi označimo z  $D^{so}$  in  $D^{si}$ , debeline sten obeh jeklenih cevi pa s  $t^{so}$  in  $t^{si}$ . Zunanja in notranja jeklena cev ter betonsko jedro med njima imajo vzdolž osi stebra konstantne prečne prereze  $A_x^{so}$ ,  $A_x^{si}$  in  $A_x^c$ . CFDST-stebel obravnavamo v tridimenzionalnem Evklidskem prostoru z desnosučnim kartezijevim koordinatnim sistemom s prostorskimi koordinatami  $X, Y, Z$  in orthonormiranimi baznimi vektorji  $E_x, E_y, E_z$ . Nedeformirana referenčna os CFDST-stebra, ki jo parametriziramo z materialno koordinato  $x$ , je skupna vsem trem slojem prečnega prereza stebra. CFDST-stebel je obremenjen s konser-



Slika 2 • Prečni presek CFDST-stebra.

Kinematične enačbe

$$\begin{aligned} u_X^i - \varepsilon^i &= 0, \\ u_Z^i + \left(1 + \frac{P}{\sum_i E^i A^i}\right) \varphi^i &= 0, \\ \varphi^i - \kappa^i &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ravnotežne enačbe

$$\begin{aligned} R_X^{si} - p_{X,in} &= 0, \\ R_X^c - p_{X,out} + p_{X,in} &= 0, \\ R_X^{so} - p_{X,out} &= 0, \\ R_Z^{si} - p_{Z,in} &= 0, \\ R_Z^c - p_{Z,out} + p_{Z,in} &= 0, \\ R_Z^{so} + p_{Z,out} &= 0, \\ M_Y^{si} - \left(1 + \frac{P}{\sum_i E^i A^i}\right) \left(\frac{E^{si} A^{si}}{\sum_i E^i A^i} P \varphi^{si} + R_Z^{si}\right) - m_{Y,in} &= 0, \\ M_Y^c - \left(1 + \frac{P}{\sum_i E^i A^i}\right) \left(\frac{E^c A^c}{\sum_i E^i A^i} P \varphi^c + R_Z^c\right) - m_{Y,out} + m_{Y,in} &= 0, \\ M_Y^{so} - \left(1 + \frac{P}{\sum_i E^i A^i}\right) \left(\frac{E^{so} A^{so}}{\sum_i E^i A^i} P \varphi^{so} + R_Z^{so}\right) + m_{Y,out} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Konstitucijske enačbe

$$\begin{aligned} R_X^i - E^i A^i \varepsilon^i &= 0, \\ M_Y^i - E^i I^i \kappa^i &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Vezne enačbe

$$\begin{aligned} \Delta_{X,in} &= u_X^{si} - u_X^c, \\ \Delta_{X,out} &= u_X^c - u_X^{so}, \\ \Delta_{Z,in} &= u_Z^{si} - u_Z^c, \\ \Delta_{Z,out} &= u_Z^c - u_Z^{so}, \\ p_{X,in} &= \pi D^{si} K_X^{si} (u_X^{si} - u_X^c), \\ p_{X,out} &= \pi D^{so} K_X^{so} (u_X^c - u_X^{so}), \\ p_{Z,in} &= \pi D^{si} K_Z^{si} (u_Z^{si} - u_Z^c), \\ p_{Z,out} &= \pi D^{so} K_Z^{so} (u_Z^c - u_Z^{so}), \\ m_{Y,in} &= m_{Y,out} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Robni pogoji

$$\begin{aligned} \text{pri } x=x^{so}=x^c=x^{si}=0 \\ S_1^i + R_X^i(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad u_X^i(0) - u_1^i = 0, \\ S_2^i + R_Z^i(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad u_Z^i(0) - u_2^i = 0, \\ S_3^i + M_Y^i(0) &= 0 \quad \text{ali} \quad \varphi^i(0) - u_3^i = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

obstaja analitična rešitev ob upoštevanju v poglavju 2.2 predstavljenih predpostavk. Ob upoštevanju osnov linearne algebre je mogoče diferencialno algebrske enačbe (1)–(4) s pripadajočimi robnimi pogoji (5)–(6) zapisati na naslednji način:

$$\mathbf{Z}(x)' = \mathbf{A} \mathbf{Z}(x), \quad (7)$$

in

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0, \quad (8)$$

kjer  $\mathbf{A}$  predstavlja matriko realnih koeficientov sistema enačb, ki je dimenzij 18 x 18,  $\mathbf{Z}(x)$  predstavlja vektor 18 neznanih funkcij ter  $\mathbf{Z}(0)$  vektor 18 neznanih integracijskih konstant. Na podlagi osnovnega izreka o linearnih sistemih enačb (Perko, 2001) je mogoče za sistem linearnih diferencialno algebrskih enačb prvega reda poiskati enolično rešitev za vse  $x \in [0, L]$  in  $\mathbf{Z}_0 \in \mathbf{R}^{18}$  s pomočjo naslednjega nastavka:

$$\mathbf{Z}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{Z}_0, \quad (9)$$

kjer je  $e^{\mathbf{A}x}$  eksponentna funkcija, ki jo je mogoče izvednotiti kot vsoto absolutno konvergentne vrste  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \mathbf{A}^k$ . Tako je mogoče točno analitično rešitev (9) zapisati kot:

$$\mathbf{Z}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \mathbf{A}^k \mathbf{Z}_0. \quad (10)$$

Ker je  $\mathbf{Z}_0$  v enačbi (10) v splošnem vektor poljubnih vrednosti neznanih integracijskih konstant, predstavlja  $\mathbf{Z}(x)$  splošno rešitev sistema enačb (7)–(8). Za izračun partikularne rešitve je treba  $\mathbf{Z}_0$  izvednotiti iz enačb oziroma robnih pogojev (5)–(6). Z upoštevanjem enačbe (10) v enačbah pripadajočih robnih pogojev (5)–(6) dobimo naslednji homogeni sistem 18 linearne algebrskih enačb:

$$\mathbf{K} \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}, \quad (11)$$

za 18 neznanih integracijskih konstant, pri čemer predstavlja  $\mathbf{K}$  tangentno togostno matriko sistema linearnih algebrskih enačb dimenzij 18 x 18.

Za sistem enačb (11) obstaja netrivialna rešitev le v primeru neničelne vrednosti determinante tangentne togostne matrike  $\mathbf{K}$ . Torej v primeru uklona CFDST-stebrov kritično uklonsko silo  $P_{cr,AN}$  določimo s pomočjo pogoja:

$$\det \mathbf{K} = 0. \quad (12)$$

Reševanje enačbe (12) predstavlja klasični matematični problem reševanja lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Splošno znano je, da najmanjša lastna vrednost tangentne togostne matrike  $\mathbf{K}$ , ob iskanju matematične rešitve konkretnega stabilnostnega problema, predstavlja vrednost kritične uklonske sile

pri  $x=x^{so}=x^c=x^{si}=L$ 

$$\begin{aligned} S_4^i - R_X^i(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad u_X^i(L) - u_4^i = 0, \\ S_5^i - R_Z^i(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad u_Z^i(L) - u_5^i = 0, \\ S_6^i - M_Y^i(L) &= 0 \quad \text{ali} \quad \varphi^i(L) - u_6^i = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

kjer  $u_j^i$   $S_j^i$  ( $j=1,2,\dots,6$ ) in predstavljajo vrednosti posplošenih robnih pomikov in robnih sil zunanje in notranje jeklene cevi ter betonskega jedra ( $i=so,c,si$ ).

## 2.4 Točna analitična rešitev problema uklona CFDST-stebrov

V nadaljevanju predstavimo izpeljavo točne analitične rešitve sistema linearnih diferencialno algebrskih enačb prvega reda (1)–(6), s katerim opišemo problematiko uklona CFDST-stebrov s podajno povezavo jeklenih cevi ter betonskega jedra. V splošnem so diferencialno algebrske enačbe zelo zapletene in so le redko analitično rešljive. Za konkretno diferencialno algebrske enačbe (1)–(6)

$P_{cr,AN}$  pripadajoči lastni vektor pa uklonsko obliko CFDST-stebra s podajno povezavo jeklenih cevi ter betonskega jedra. V pričujočem prispevku smo kritično uklonsko silo  $P_{cr,AN}$  izvedli s pomočjo programske opreme MATHEMATICA (Wolfram S., 2017). Matematični izraz, ki določa kritično uklonsko silo  $P_{cr,AN}$  v splošnem podajno povezanega betonskega jedra in kovinskih cevi CFDST-stebrov, je zelo obsežen ter zapleten in ga zato v pričujočem prispevku ne prikažemo. V nade-

ljevanju prikažemo le matematična izraza za kritično uklonsko silo  $P_{cr,AN}$  za primer povsem toge (13) ter povsem podajne (14) povezave med betonskim jedrom in kovinskimi cevmi:

$$P_{cr,AN}(K_X = K_Z = \infty) = \frac{\pi^2 (E^c I^c + E^{si} I^{si} + E^{so} I^{so})}{(1 + \varepsilon) L^2}, \quad (13)$$

$$P_{cr,AN}(K_X = K_Z = 0) = \frac{\pi^2 E^i I^i}{(1 + \varepsilon) L^2} + (E^j A^j + E^k A^k) \varepsilon. \quad (14)$$

V enačbi (14) prestavlja  $i$  indeks sloja z najmanjšo upogibno togostjo,  $j$  in  $k$  pa indeksa preostalih dveh slojev sovprednega prečnega prereza. V enačbah (13) in (14) velja tudi  $\varepsilon = \varepsilon^c = \varepsilon^{so} = \varepsilon^{si}$ .

### 3 • REZULTATI IN DISKUSIJA

V tem poglavju predstavimo dva nazorna računska primera. V obsegu prvega računskega primera primerjamo vrednosti uklonskih sil, ki jih izračunamo s predstavljenim matematičnim modelom, in vrednosti uklonskih sil, ki so jih na realnih CFDST-stebrih, v obsegu laboratorijskih preiskav, izmerili Tao s sodelavci (Tao, 2004) in Essopjee ter Dundu (Essopjee, 2015). V drugem računskem primeru predstavimo primerjavo različnih računskih postopkov za določitev uklonskih sil CFDST-stebrov. Primerjamo analitične vrednosti uklonskih sil CFDST-stebrov, izračunane z razvitim matematičnim modelom z vrednostmi uklonskih sil, ki sta jih numerično izvednili Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014). Sočasno izvedemo tudi primerjavo vrednosti kritičnih uklonskih sil CFDST-stebrov, ki sta jih navedena avtorja izračunala upoštevaje standarde ((CEN, 1992) in (AISC, 2010)).

#### 3.1 Primerjava analitičnih in eksperimentalnih vrednosti uklonskih sil CFDST-stebrov

Z namenom validacije predstavljenega matematičnega modela za izračun kritične uklonske sile CFDST-stebrov s podajno povezavo slojev izvedemo primerjavo analitično izračunanih vrednosti uklonskih sil  $P_{cr,AN}$  ter eksperimentalno pridobljenih vrednosti uklonskih sil  $N_{test}$ , kot jih predstavijo avtorji Tao s sodelavci (Tao, 2004) in Essopjee ter Dundu (Essopjee, 2015). Eksperimentalno preiskani CFDST-stebri so bili obojestransko vrtljivo podprti, njihove oznake pa povzamemo po avtorjih znanstvenih prispevkov, in sicer: S139.2-2.5, S152.4-2.5, S165.1-2.5 ter S193.7-2.5 Essopjee ter Dundu (Essopjee, 2015) in pcc2-1a in pcc2-1b (Tao, 2004). Ker analiza rezultatov analitičnih rešitev pokaže, da so vrednosti kritičnih uklonskih sil  $P_{cr,AN}$  odvisne le od prečne togosti stika slojev CFDST-stebrov  $K_Z$ , izvedemo primerjavo za različne vrednosti prečnih togosti stika  $K_Z \in [0, \infty]$ , merjenih v kN/cm<sup>2</sup>. Rezultate primerjav povzemamo v preglednici 2 in na sliki 3.

Iz preglednice 1 je razvidno, da ima vrednost prečne togosti stika  $K_Z$  precejšen vpliv na vrednost kritične uklonske sile  $P_{cr}$ . Z naraščanjem vrednosti prečne togosti stika  $K_Z$  jeklenih cevi in betonskega jedra narašča tudi vrednosti uklonske sile CFDST-stebra. Analitične vrednosti

kritičnih uklonskih sil pri nižjih vrednostih prečne togosti stika  $K_Z$ , ki so manjše kot eksperimentalno pridobljene vrednosti, so konservativne in so v preglednici 2 obarvane z modro. Le v primeru preizkušanca z oznako pcc2-1b so analitične vrednosti kritične uklonske sile  $P_{cr}$  ne glede na vrednost prečne togosti stika  $K_Z$  vedno večje kot eksperimentalno določena uklonska sila  $N_{test}^{pcc2-1b} = 595 \text{ kN}$ .

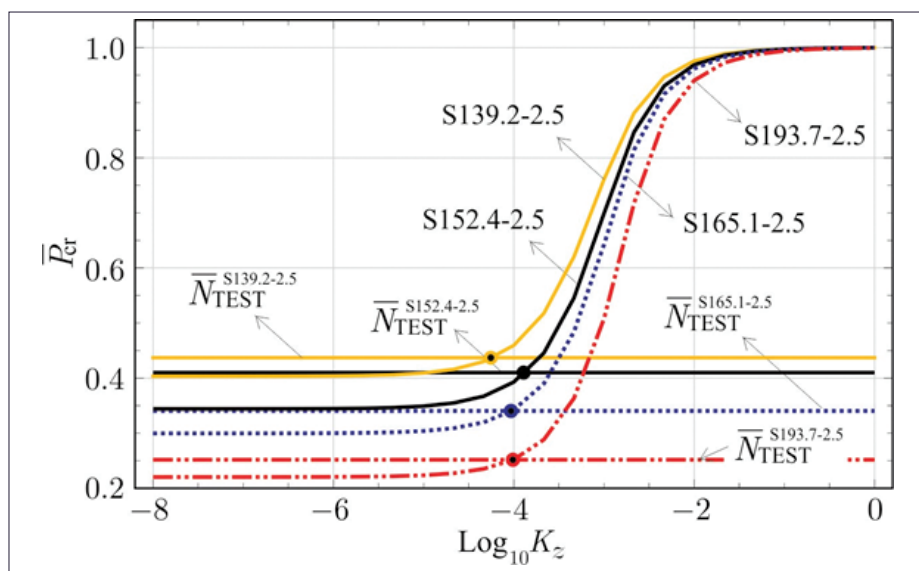
Na podlagi zahteve po enakosti analitične kritične uklonske sile  $P_{cr,AN}$  in eksperimentalno določene uklonske sile  $N_{test}$  je mogoče izračunati vrednost prečne togosti stika  $K_Z$  jeklenih cevi in betonskega jedra. Na sliki 3 prikazujemo primerjavo normiranih analitičnih vrednosti kritičnih uklonskih sil  $\bar{P}_{cr} = P_{cr,AN} / P_E$  in normiranih eksperimentalnih uklonskih sil  $\bar{N}_{test} = N_{test} / P_E$  za različne vrednosti prečne togosti stika  $K_Z$ . Pri tem  $P_E$  predstavlja Eulerjevo uklonsko silo CFDST-stebra s togo povezavo jeklenih cevi in betonskega jedra, to je pri  $K_Z = \infty \text{ kN/cm}^2$ .

Na podlagi pogoja enakosti  $\bar{P}_{cr} = \bar{N}_{test}$  lahko izračunamo vrednosti prečne togosti stika  $K_Z$ , ki so prikazane v preglednici 3.

Iz rezultatov na sliki 3 ter iz preglednice 3 je razvidno, da prečna togost stika  $K_Z$  med jeklenimi cevmi in betonskim jedrom pomembno vpliva na obnašanje CFDST-stebrov. Navedeno

| oznaka preizkušanca | $P_{cr,AN} \text{ (kN)}$ |                         |         |               |               |               |               |               |              |
|---------------------|--------------------------|-------------------------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
|                     | $\lambda$                | $N_{test} \text{ (kN)}$ | $K_Z=0$ | $K_Z=10^{-7}$ | $K_Z=10^{-6}$ | $K_Z=10^{-5}$ | $K_Z=10^{-4}$ | $K_Z=10^{-3}$ | $K_Z=\infty$ |
| S139.2-2.5          | 63,7                     | 732,1                   | 675,250 | 675,348       | 676,234       | 685,054       | 769,194       | 1273,71       | 1674,28      |
| S152.4-2.5          | 59,3                     | 949,0                   | 796,253 | 796,369       | 797,415       | 807,837       | 909,172       | 1617,52       | 2314,56      |
| S165.1-2.5          | 55,5                     | 1036,5                  | 912,118 | 912,251       | 913,448       | 925,400       | 1042,76       | 1956,26       | 3044,65      |
| S193.7-2.5          | 48,4                     | 1458,7                  | 1276,92 | 1277,11       | 1278,79       | 1295,54       | 1461,66       | 2942,89       | 5792,84      |
| pcc2-1a             | 58,5                     | 620                     | 599,209 | 599,240       | 599,517       | 602,282       | 629,514       | 853,193       | 1678,46      |
| pcc2-1b             | 56,5                     | 595                     | 599,209 | 599,240       | 599,517       | 602,282       | 629,514       | 853,193       | 1678,46      |

Preglednica 2 • Primerjava analitičnih ( $P_{cr,AN}$ ) in eksperimentalnih ( $N_{test}$ ) vrednosti kritičnih uklonskih sil CFDST-stebrov za različne vrednosti prečnih togosti stika  $K_Z$ , merjenih v kN/cm<sup>2</sup>.



Slika 3 • Normirane analitične vrednosti kritičnih uklonskih sil  $\bar{P}_{cr}$  in normirane eksperimentalno določene uklonske sile  $\bar{N}_{test}$  obravnavanih preizkušancev za različne vrednosti prečne togosti stika  $K_z$ .

| preizkušanec                | S139.2-2.5           | S152.4-2.5           | S165.1-2.5           | S193.7-2.5           |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $K_z$ (kN/cm <sup>2</sup> ) | $5,92 \cdot 10^{-5}$ | $1,36 \cdot 10^{-4}$ | $9,55 \cdot 10^{-5}$ | $9,85 \cdot 10^{-5}$ |

Preglednica 3 • Vrednosti prečnih togosti stika  $K_z$ , izračunanih na podlagi pogoja enakosti  $\bar{P}_{cr} = \bar{N}_{test}$  za določene eksperimentalno preiskane CFDST-stebre.

|              |           |      |       |       | $P_{cr,AN}$ (kN)            |           |           |           | $K_z$                 | $K_z$                 | $K_z$                 |
|--------------|-----------|------|-------|-------|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|              |           |      |       |       | $K_z$ (kN/cm <sup>2</sup> ) |           |           |           | (kN/cm <sup>2</sup> ) | (kN/cm <sup>2</sup> ) | (kN/cm <sup>2</sup> ) |
| $P_{ul,MKE}$ |           |      |       |       |                             |           |           |           | $P_{cr,AN} =$         | $P_{cr,AN} =$         | $P_{cr,AN} =$         |
|              |           |      |       |       |                             |           |           |           | $P_{ul,MKE}$          | $P_{EC4}$             | $P_{AISC}$            |
| Steber       | $\lambda$ | (kN) | (kN)  | (kN)  | 0                           | $10^{-6}$ | $10^{-5}$ | $10^{-4}$ |                       |                       |                       |
| C5           | 51        | 9440 | 10610 | 10981 | 12711                       | 12733     | 12962     | 14775     | NaN                   | NaN                   | NaN                   |
| C6           | 62        | 8431 | 9503  | 10122 | 8621                        | 8652      | 8936      | 11512     | NaN                   | $2,85 \cdot 10^{-5}$  | $4,95 \cdot 10^{-5}$  |
| C7           | 73        | 7358 | 8298  | 9165  | 6228                        | 6273      | 6661      | 9891      | $2,70 \cdot 10^{-5}$  | $5,17 \cdot 10^{-5}$  | $7,68 \cdot 10^{-5}$  |
| C8           | 84        | 6591 | 7115  | 8176  | 4709                        | 4768      | 5273      | 8910      | $3,63 \cdot 10^{-5}$  | $4,82 \cdot 10^{-5}$  | $7,62 \cdot 10^{-5}$  |
| C9           | 94        | 5803 | 6055  | 7178  | 3686                        | 3759      | 4392      | 8039      | $3,40 \cdot 10^{-5}$  | $3,91 \cdot 10^{-5}$  | $6,72 \cdot 10^{-5}$  |
| C10          | 105       | 5014 | 5155  | 6202  | 2963                        | 3054      | 3816      | 7109      | $2,78 \cdot 10^{-5}$  | $3,04 \cdot 10^{-5}$  | $5,55 \cdot 10^{-5}$  |
| C11          | 116       | 4393 | 4411  | 5274  | 2433                        | 2544      | 3433      | 6186      | $2,31 \cdot 10^{-5}$  | $2,33 \cdot 10^{-5}$  | $4,25 \cdot 10^{-5}$  |
| C12          | 127       | 3951 | 3902  | 4419  | 2033                        | 2166      | 3169      | 5354      | $2,03 \cdot 10^{-5}$  | $1,79 \cdot 10^{-5}$  | $3,00 \cdot 10^{-5}$  |
| C13          | 138       | 3140 | 3302  | 3749  | 1725                        | 1881      | 2974      | 4641      | $1,19 \cdot 10^{-5}$  | $1,39 \cdot 10^{-5}$  | $2,16 \cdot 10^{-5}$  |
| C14          | 149       | 2827 | 2890  | 3220  | 1482                        | 1661      | 2812      | 4043      | $1,02 \cdot 10^{-5}$  | $1,09 \cdot 10^{-5}$  | $1,59 \cdot 10^{-5}$  |
| C15          | 160       | 2455 | 2548  | 2796  | 1287                        | 1491      | 2659      | 3533      | $7,67 \cdot 10^{-6}$  | $8,65 \cdot 10^{-6}$  | $1,20 \cdot 10^{-5}$  |
| C16          | 171       | 2156 | 2262  | 2451  | 1128                        | 1358      | 2501      | 3127      | $5,93 \cdot 10^{-6}$  | $6,94 \cdot 10^{-6}$  | $9,22 \cdot 10^{-6}$  |
| C17          | 182       | 1971 | 2020  | 2165  | 997                         | 1253      | 2336      | 2776      | $5,17 \cdot 10^{-6}$  | $5,61 \cdot 10^{-6}$  | $7,20 \cdot 10^{-6}$  |
| Mean         |           |      |       |       |                             |           |           |           | $1,90 \cdot 10^{-5}$  | $2,38 \cdot 10^{-5}$  | $3,86 \cdot 10^{-5}$  |
| COV          |           |      |       |       |                             |           |           |           | 0,60                  | 0,67                  | 0,68                  |

Legenda: NaN – vrednost ni definirana, Mean – srednja vrednost, COV – koeficient variacije

Preglednica 4 • Primerjava analitičnih vrednosti  $P_{cr,AN}$ , numeričnih  $P_{ul,MKE}$  in skladno s standardoma (CEN, 1992)  $P_{EC4}$  in (AISC, 2010)  $P_{AISC}$  izračunanih vrednosti uklonskih sil CFDST-stebrov pri različnih vrednostih prečne togosti stika  $K_z$  (kN/cm<sup>2</sup>).

je mogoče potrditi tudi s primerjavo vrednosti uklonskih sil realnih CFDST-stebrov, saj eksperimentalno izmerjene vrednosti uklonskih sil dosegajo le okvirno 25–40 % vrednosti Eulerjevih uklonskih sil CFDST-stebrov s togo povezavo jeklenih cevi in betonskega jedra.

### 3.2 Primerjava analitičnih, numeričnih in vrednosti uklonskih sil CFDST-stebrov, izračunanih na podlagi standardov

V tem poglavju prikažemo primerjavo kritičnih uklonskih sil  $P_{cr,AN}$  CFDST-stebrov, izračunanih s predstavljenim matematičnim modelom, ter uklonskih sil  $P_{ul,MKE}$ , ki sta jih numerično, z uporabo metode končnih elementov, izračunala avtorja Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014). Navedene uklonske sile primerjamo tudi z vrednostmi uklonskih sil CFDST-stebrov, ki so izračunane skladno s standardoma (CEN, 1992) in (AISC, 2010). Vrednosti uklonskih sil za obojestransko vrtljivo podprte CFDST-stebre, pri različnih prečnih togostih stika  $K_z$ , so zbrane v preglednici 4. Geometrijski in materialni podatki obravnavanih CFDST-stebrov kot tudi računski postopki standardov (CEN, 1992) in (AISC, 2010) so podrobneje predstavljeni v znanstvenem prispevku avtorjev Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014).

Kot pričakovano, je iz preglednice 4 razvidno, da se vrednosti uklonskih sil zmanjšujejo z naraščanjem vitkosti CFDST-stebrov ter zmanjševanjem prečne togosti stika  $K_z$  jeklenih cevi in betonskega jedra. V primeru srednje vitkega stebra C5 opazimo, da so uklonske sile  $P_{ulMKE}$ ,  $P_{EN4}$  in  $P_{AISC}$  manjše kot analitično izračunana vrednost kritične uklonske sile  $P_{cr,AN}$  ne glede na vrednost prečne togosti stika  $K_z$ . Za preostale CFDST stebre, C6–C17,

se vrednosti uklonskih sil nahajajo med mejnima vrednostma, ki jih izračunamo za absolutno podajno ( $K_z=0$ ) in absolutno togo ( $K_z=\infty$ ) prečno togost stika jeklenih cevi in betonskega jedra. Na podlagi pogojev enakosti  $P_{cr,AN} = P_{ulMKE}$ ,  $P_{cr,AN} = P_{EN4}$  in  $P_{cr,AN} = P_{AISC}$  smo za vse obravnavane CFDST-stebre izračunali tudi pripadajoče vrednosti prečne togosti stika  $K_z$ , ki so prikazane v zadnjih treh stolpcih preglednice 4. Opaziti je zmanj-

ševanje vrednosti prečne togosti stika  $K_z$  ob naraščanju vitkosti  $\lambda$  obravnavanih CFDST-stebrov. Poleg navedenega smo za vsako izmed računskih metod, ki so obravnavane v znanstvenem prispevku avtorjev Hassanein in Kharoob (Hassanein, 2014), izračunali tudi srednjo vrednost prečnih togosti stika  $K_z$  s pripadajočim koeficientom variacije. Te so prikazane v zadnjih dveh vrsticah preglednice 4.

## 4 • SKLEP

V prispevku smo predstavili nov matematični model in pripadajočo analitično rešitev za izračun kritične uklonske sile vitkih okroglih dvocevni sovprežnih stebrov z betonskim jedrom (CFDST) in upoštevanjem zdrsa med jeklom in betonom.

Glede na rezultate izvedenih računskih analiz, ki so predstavljene v predhodnih poglavjih, lahko podamo naslednje bistvene zaključke:

- analitično določena vrednost kritične uklonske sile,  $P_{cr,AN}$  CFDST-stebrov je neod-

visna od vzdolžne togosti stika  $K_x$  med jeklenim in betonskim delom sovprežnega prečnega prereza,

- prečna togost stika  $K_z$  med jeklenima cevema in betonskim jedrom CFDST-stebrov ima pomemben vpliv na vrednost kritične uklonske sile  $P_{cr,AN}$ ,
- analitične vrednosti kritične uklonske sile,  $P_{cr,AN}$  CFDST-stebrov lahko povsem sovpadajo z eksperimentalnimi in numeričnimi vrednostmi uklonskih sil, če v iz-

računih upoštevamo ustrezno kalibrirano vrednost prečne togosti stika  $K_z$ ,

- na podlagi izvedenih računskih analiz in primerjav različnih računsko in eksperimentalno določenih vrednosti uklonskih sil CFDST stebrov ugotavljamo, da imajo stične površine med jeklenimi cevmi in betonskim jedrom pomemben vpliv na obnašanje tlačno obremenjenih CFDST-stebrov,
- predstavljeno analitično rešitev je mogoče uporabiti za verifikacijo drugih razvitih računskih modelov za obravnavo deformacijsko napetostnega stanja CFDST-stebrov s podajno povezavo med jeklom in betonom.

## 5 • ZAHVALA

Predstavljeni rezultati so pridobljeni v sklopu dela programske skupine Mehanika konstrukcij (P2-0260), ki ju financira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije. Za finančno pomoč se jih iskreno zahvaljujemo.

## 6 • LITERATURA

AISC, Load and resistance factor design specification for structural steel buildings, American Institute of Steel Construction, Chicago, USA, 2010.

CEN, EN 1994-1-1: 1992, Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures, European Committee for Standardization, Brussels, 1992.

Elchalakani M., Zhao X.L., Grzebieta R., Tests on concrete filled double-skin (CHS outer and SHS inner) composite short columns under axial compression, Thin Walled Structures, 40, 415–441, 2002.

Essopjee Y., Dundu M., Performance of concrete-filled double-skin circular tubes in compression, Composite Structures, 133, 1276–1283, 2015.

Han L.H., Tao Z., Huang H., Zhao X.L., Concrete-filled double-skin (SHS outer and CHS inner) steel tubular beam-columns, Thin Walled Structures, 42, 1329–1355, 2004.

Hassanein M.F., Kharoob O.F., Analysis of circular concrete-filled double skin tubular slender columns with external stainless steel tubes, Thin Walled Structures, 79, 23–37, 2014.

Hu H.T., Su F.C., Nonlinear analysis of short concrete-filled double skin tube columns subjected to axial compressive forces, Marine Structures, 24, 319–337, 2011.

Huang H., Han L.H., Tao Z., Zhao X.L., Analytical behaviour of concrete-filled double skin steel tubular (CFDST) stub columns, Journal of Constructional Steel Research, 66, 542–555, 2010.

- Pagoulatou M., Sheehan T., Dai X.H., Lam D., Finite element analysis on the capacity of circular concrete-filled double-skin steel tubular (CFDST) stub columns, *Engineering Structures*, 72, 102–112, 2014.
- Perko L., *Differential equations and dynamical systems*, (3rd Edition), Springer-Verlag, NY, USA, 2001.
- Reissner E., On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, *Journal of Applied Mechanics and Physics*, 23, 795–804, 1972.
- Romero M.L., Espinos A., Portoles J.M., Hospitaler A., Ibanez C., Slender double-tube ultra-high strength concrete-filled tubular columns under ambient temperature and fire, *Engineering Structures*, 99, 536–545, 2015.
- Schnabl S., Jelenić G., Planinc I., Analytical buckling of slender circular concrete-filled steel tubular columns with compliant interfaces, *Journal of Constructional Steel Research*, 115, 252–262, 2015.
- Schnabl S., Planinc I., Buckling of slender concrete-filled steel tubes with compliant interfaces, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14(10), 1837–1852, 2017.
- Schnabl S., Planinc I., Circumferential gap and partial debonding effects on buckling loads and modes of slender CFST circular columns, *Acta Mechanica*, 230, 909–928, 2019.
- Tan K.H., Zhang Y.F., Compressive stiffness and strength of concrete filled double skin (CHS inner and CHS outer) tubes, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 283–291, 2010.
- Tao Z., Han L.H., Zhao X.L., Behaviour of concrete-filled double-skin (CHS inner and CHS outer) steel tubular stub columns and beam-columns, *Journal of Constructional Steel Research*, 60, 1129–1158, 2004.
- Wolfram S., *Mathematica*, Addison-Wesley Publishing Company, 2017.
- Yang Y.F., Han L.H., Sun B.H., Experimental behaviour of partially loaded concrete filled double-skin steel tube (CFDST) sections, *Journal of Constructional Steel Research*, 71, 63–73, 2012.