

Gregor Udovč, mag. inž. grad.

gregor.udovc@fgg.uni-lj.si, gregor@biroudovc.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,

Jamova 2, 1000 Ljubljana

Biro Udovč – Projektiranje, nadzor, svetovanje Stanislav Udovč, s. p.,

Kočevarjeva ulica 1, 8000 Novo mesto



prof. dr. Tomaž Hozjan, univ. dipl. inž. grad.

tomaz.hozjan@fgg.uni-lj.si



prof. dr. Igor Planinc, univ. dipl. inž. grad.

igor.planinc@fgg.uni-lj.si



asist. dr. Anita Ogrin, univ. dipl. inž. grad.

anita.ogrin@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,

Jamova 2, 1000 Ljubljana



Znanstveni članek

UDK 519.6:624.072.2

ANALIZA DVOSLOJNIH PROSTORSKIH NOSILCEV S PODAJNIM STIKOM

ANALYSIS OF TWO-LAYER SPATIAL BEAMS WITH INTER-LAYER SLIP

Povzetek

V članku je predstavljen nov matematični in numerični model za analizo dvoslojnih prostorskih nosilcev s podajnim stikom. Novosti v predstavljenem matematičnem in numeričnem modelu je več. Prva novost je ta, da model omogoča analizo vpliva strižnih deformacij na togost dvoslojnih prostorskih nosilcev. Druga novost modela je v tem, da se sloja na stiku lahko zamakneta v vzdolžni in prečni smeri, medtem ko zamiki pravokotno na ravnino stika niso možni. Pomembna novost modela pa je tudi ta, da so osnovne enačbe modela konsistentno ločene v dve nepovezani skupini. S tem se med reševanjem enačb izognemo negativnim vplivom singularnosti zaradi veznih enačb. V predstavljenem numeričnem modelu so enačbe rešene z metodo končnih elementov. V ta namen je bila razvita nova družina deformacijskih končnih elementov, pri katerih vse deformacijske količine modela nosilca interpoliramo z Lagrangevimi polinomi poljubne stopnje. Z vpeljavo deformacijskih končnih elementov se izognemo vsem vrstam blokiranja, ki so značilne za končne elemente, zasnovane na pomikih. S konvergenčnimi in parametričnimi študijami, predstavljenimi v članku, je bilo ugotovljeno: (i) da so deformacijski končni elementi zelo natančni in zato primerni za analizo dvoslojnih prostorskih nosilcev, (ii) da podajnost stika med slojema nosilca bistveno vpliva na velikosti fizikalnih količin in se jo zato pri analizi dvoslojnih prostorskih nosilcev mora upoštevati in (iii) da je vpliv strižnih deformacij na togost dvoslojnih prostorskih nosilcev s podajnim stikom manjši kot pri homogenih prostorskih nosilcih.

Ključne besede: kompozitni nosilec, deformacijski končni element, podajen stik, prostorska analiza, strižne deformacije

Summary

The article presents a new mathematical and numerical model for the analysis of two-layer spatial beams with inter-layer slip. There are several novelties in the presented mathematical and numerical model. The first novelty is that the model allows the analysis of the influence of shear deformations on the stiffness of two-layer spatial beams. The second novelty of the model is that the inter-layer slip can take place in both longitudinal and transverse directions, while inter-layer slip in perpendicular direction is not possible. Yet another important novelty of the model is a consistent separation of the basic equations of the model into two unrelated groups. The negative effect of singularities due to the constraint equations, which would otherwise occur when solving the model equations, is thus avoided. The equations of the presented numerical model are solved by applying the finite element method. Thus, a new family of deformation based finite elements has been developed, in which all the deformation quantities of the beam model are interpolated with Lagrange polynomials of arbitrary degree. By introducing a new deformation based finite element we are able to avoid all types of blocking typical for displacement-based finite elements. The convergence and parametric studies, presented in this article, show: (i) that the deformation based finite elements are very accurate and therefore suitable for the analysis of two-layer spatial beams, (ii) that the inter-layer slip significantly affects the values of physical quantities and therefore has to be considered in the analysis, and (iii) that shear deformations have smaller effect on the stiffness of the two-layer spatial beams than on the stiffness of homogeneous spatial beams.

Key words: composite beam, deformation based finite element, inter-layer slip, spatial analysis, shear deformations

1 UVOD

V gradbeništvu je uporaba kompozitnih konstrukcijskih elementov pogosta. Kot elemente nosilne konstrukcije jih srečamo v mostogradnji in visokogradnji, največkrat pri montažni in polmontažni gradnji, še posebej pogosto pa pri sanacijah objektov. Najpogostejši kompozitni konstrukcijski elementi v gradbeništvu so dvo- ali večslojni nosilci, sestavljeni iz dveh ali več vodoravnih slojev iz različnih materialov. Izbira materialov in njihova lega v nosilcu je pogojena z njihovimi lastnostmi. Tako pri sovprežnih nosilcih iz jekla in betona izkoristimo ugodno obnašanje betona v tlaku in ugodno natezno trdnost jekla. Seveda je kompozitno delovanje dvoslojnih oziroma večslojnih nosilcev odvisno od veznih sredstev med sloji nosilca. Poznamo mehanska in kemična vezna sredstva, vendar ne glede na izbiro veznih sredstev popolne, idealno toge povezave med slojema ne moremo zagotoviti. Podajnost stika je odvisna od izbire samih veznih sredstev, ki so največkrat že v osnovi podajna, in od njihove razporeditve, lahko pa je tudi posledica napak med izvedbo oziroma posledica poškodb, ki se pojavijo v življenjski dobi konstrukcije.

Kot kažejo številne raziskave, podajnost stika med sloji bistveno vpliva na togost, duktilnost in nosilnost dvoslojnih in večslojnih nosilcev. V znanstveni literaturi zasledimo številne raziskave o modelih za analizo tovrstnih konstrukcij. Omenimo le nekatere. Med prvimi se je z analizo dvoslojnih nosilcev ukvarjal Newmark [Newmark, 1951], nekoliko pozneje pa še Goodman in Popov [Goodman, 1969]. Z razvojem računalništva se pojavijo tudi številni analitični in numerični modeli za analizo dvoslojnih nosilcev, kot na primer [Čas, 2004], [Fabbrocino, 1999], [Girhammar, 1993], [Hozjan, 2013], [Krofič, 2012] in številni drugi. Skupno vsem tem raziskavam je to, da so dvoslojne nosilce analizirali ravninsko. Raziskav o prostorskem obnašanju dvoslojnih nosilcev je v znanstveni literaturi relativno malo. Med prvimi sta bočno zvrnitev dvoslojnih nosilcev analizirala Challamel in Girhammar [Challamel, 2013]. Analitično rešitev dvoslojnih prostorskih elastičnih nosilcev s podajnim stikom v prečni in vzdolžni smeri so prvi predstavili Čas in sodelavci [Čas, 2018], analizo vpliva strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema na togost dvoslojnih prostorskih nosilcev pa so nedavno predstavili Udovč in sodelavci [Udovč, 2021].

V tem članku predstavljamo nov matematični in numerični model za analizo dvoslojnih prostorskih nosilcev s podajnim stikom (v nadaljevanju DSP-nosilcev). Opisani model predstavlja nadgradnjo raziskav, prikazanih v delih Časa ter Udovča s sodelavci ([Čas, 2018], [Udovč, 2021]). Glede na omenjene raziskave je prispevek novega matematičnega in numeričnega modela naslednji: (i) model omogoča analizo vpliva strižnih deformacij na togost DSP-nosilcev, (ii) sloja na stiku se lahko zamakneta v vzdolžni in prečni smeri, ne moreta pa se zamakniti pravokotno na ravnino stika in (iii) obnašanje veznih sredstev na stiku med slojema je lahko tudi nelinearno. Posplošene ravnotežne enačbe predstavljenega modela izpeljemo z linearizacijo osnovnih enačb Reissner-Simove teorije prostorskih nosilcev [Simo, 1985]. Pri tem enačbe modela konsistentno ločimo v dve nepovezani skupini, s čimer se med reševanjem izognemo negativnim singularnim vplivom veznih enačb. Za reševanje nelinearnega sistema posplošenih ravnotežnih enačb za analizo DSP-no-

silcev uporabimo metodo končnih elementov. V ta namen smo razvili novo družino deformacijskih končnih elementov, katerih značilnost je v tem, da le deformacijske količine interpoliramo z Lagrangeovimi polinomi poljubne stopnje. Na ta način se v analizi izognemo vsem vrstam blokiranja, ki so značilne za končne elemente, zasnovane na pomikih [Čas, 2004].

V nadaljevanju članka najprej podrobno prikažemo posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilcev, čemur sledi podrobna predstavitev reševanja posplošenih ravnotežnih enačb z deformacijsko metodo končnih elementov. Na dveh računskih primerih nato s parametričnimi študijami analiziramo konvergenčne lastnosti deformacijskih končnih elementov, vpliv podajnosti stika med slojema in vpliv strižnih deformacij na togost DSP-nosilcev. V zaključku predstavimo ugotovitve naše raziskave.

2 OSNOVNE ENAČBE

2.1 Osnovne predpostavke in deformacijska preslikava

Opazujemo prostorski kompozitni nosilec, ki ga sestavlja dva sloja, sloj a in sloj b ; v nadaljevanju ga imenujemo dvoslojni prostorski nosilec (DSP-nosilec). Osnovne predpostavke, ki jih upoštevamo pri izpeljavi osnovnih enačb DSP-nosilca, razdelimo v tri skupine. V prvo skupino spadajo predpostavke, ki določajo obliko in velikost deformirane lege nosilca. Predpostavke o načinu povezave med slojema nosilca uvrstimo v drugo skupino. V zadnji skupini predpostavk pa so predpostavke o materialnih lastnostih obeh slojev nosilca in lastnostih veznih sredstev med slojema. Osnovne predpostavke so:

A. Geometrijske predpostavke:

- spremembe oblike in velikosti vsakega sloja obravnavanega nosilca zaradi zunanjih mehanskih vplivov so 'majhne'; pri izpeljavi osnovnih posplošenih ravnotežnih enačb upoštevamo linearno teorijo prostorskih nosilcev;
- referenčni osi vsakega sloja nosilca sta v nedeformirani legi ravni in med seboj vzporedni; brez izgube na splošnosti za referenčni osi obeh slojev nosilca izberemo težiščni osi slojev;
- oblike in velikosti prečnih prereзов vsakega sloja nosilca so v nedeformirani legi poljubne, vendar so vzdolž osi nosilca konstantne in se med deformiranjem nosilca ne spreminjajo;
- prečni prerezi vsakega sloja, ki so v nedeformirani legi ravni in pravokotni na težiščno os sloja, po deformiranju ostanejo ravni, toda ne več pravokotni na deformirano težiščno os sloja. S tem v analizi DSP-nosilcev upoštevamo tudi strižne deformacije obravnavanega nosilca;
- stična ploskev med slojema nosilca je v nedeformirani legi del ravnine, ki je vzporedna s težiščnima osem slojev. Premica, ki povezuje težišči prečnih prereзов slojev nosilca, je v nedeformirani legi pravokotna na stično ravnino med slojema nosilca.

B. Predpostavke o stiku:

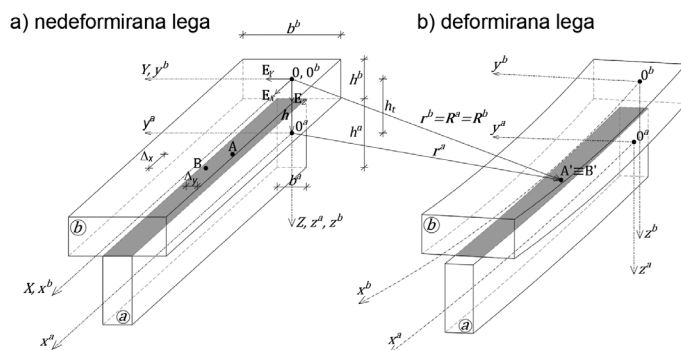
- na stiku se sloja lahko zamakneta v vzdolžni in prečni smeri;

- pravokotno na stično ploskev slojev nosilca je povezava med slojema toga;
- vzdolžni in prečni zamiki med slojema nosilca so »majhni«; vezne enačbe med slojema upoštevamo v linearni obliki;
- zasuki prečnih prereзов slojev nosilca so za oba sloja enaki.

C. Predpostavke o materialih:

- vsak sloj nosilca se obnaša linearno elastično skladno s Hookovim zakonom; pri tem so lahko materialni parametri modela vsakega sloja različni;
- za vsak sloj nosilca je materialni model lahko različen, vendar v vseh delcih sloja enak;
- materialni model obnašanja veznih sredstev na stiku nosilca je nelinearen in nehomogen ter v vzdolžni in prečni smeri nepovezan.

Skladno z geometrijskimi predpostavkami v nadaljevanju predstavimo deformacijsko preslikavo DSP-nosilca. Kot vemo, ta predstavlja preslikavo DSP-nosilca iz nedeformirane lege v deformirano lego. Deformacijsko preslikavo opišemo v točkovnem evklidskem prostoru, ki ga označimo z $\mathbf{E}$. Koordinate globalnega kartezijskega koordinatnega sistema v $\mathbf{E}$ označimo z X, Y, Z , pripadajoče bazne vektorje pa z $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ in $\mathbf{E}_z = \mathbf{E}_x \times \mathbf{E}_y$. Za koordinate opazovališča izberemo $0 \equiv (0,0,0)$, krajevni vektor do poljubne točke v $\mathbf{E}$ pa označimo z $\mathbf{R}$. Tudi lokalna koordinatna sistema v nedeformirani legi vsakega sloja prostorskega nosilca sta kartezijeva. Lokalne koordinate sloja a označimo z x^a, y^a in z^a , pripadajoče bazne vektorje pa z $\mathbf{e}_x^a, \mathbf{e}_y^a$ in $\mathbf{e}_z^a = \mathbf{e}_x^a \times \mathbf{e}_y^a$. Lokalne koordinate sloja a $(0,0,0)$ identificiramo v $\mathbf{E}$ s točko 0^a , ki je za $h_t \mathbf{E}_z$ oddaljena od opazovališča 0 . Pri tem je h_t razdalja med težiščema slojev. Za koordinatno os x^a izberemo težiščno os sloja a , koordinatna os y^a je vzporedna z ravnino stika, os z^a pa je pravokotna na ravnino stika. Koordinatni osi y^a in z^a ležita v ravnini prečnega prereza sloja a . Podobno izberemo tudi lokalni koordinatni sistem sloja b . Lokalne koordinate označimo z x^b, y^b in z^b , pripadajoče bazne vektorje pa z $\mathbf{e}_x^b, \mathbf{e}_y^b$ in $\mathbf{e}_z^b = \mathbf{e}_x^b \times \mathbf{e}_y^b$. V nedeformirani legi nosilca lokalne koordinate sloja b $(0,0,0)$ identificiramo s točko 0^b , ki sovpada z globalnim opazovališčem 0 . V deformirani legi pa lokalna koordinatna sistema izberemo tako, da so lokalne koordinate delcev v nedeformirani in deformirani legi enake. Tako izbrana lokalna koordinatna sistema sta krivočrtna, koordinatam pa pravimo konvektivne koordinate. Nedeformirano in deformirano lego DSP-nosilca z oznakami značilnih geometrijskih količin prikazujemo na sliki 1.



Slika 1. Dvoslojni prostorski nosilec z oznakami značilnih geometrijskih količin v (a) nedeformirani in (b) deformirani legi.

Deformirani legi sloja a in sloja b DSP-nosilca opišemo v $\mathbb{R}^3$ s krajevnima vektorjema $\mathbf{R}^a$ in $\mathbf{R}^b$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^a &= X^a \mathbf{E}_x + Y^a \mathbf{E}_y + Z^a \mathbf{E}_z = h_t \mathbf{E}_z + \mathbf{r}^a(x^a, y^a, z^a), \\ \mathbf{R}^b &= X^b \mathbf{E}_x + Y^b \mathbf{E}_y + Z^b \mathbf{E}_z = \mathbf{r}^b(x^b, y^b, z^b).\end{aligned}\quad (1)$$

Pri tem vektorja $\mathbf{r}^i$ ($i=a,b$) skladno z geometrijskimi predpostavkami izrazimo s poljem pomikov vzdolž težiščnih osi vsakega sloja nosilca $\mathbf{u}^i(x^i)$ in poljem zasukov prečnih prereзов $\boldsymbol{\varphi}^i(x^i)$.

$$\mathbf{r}^i(x^i, y^i, z^i) = x^i \mathbf{e}_x^i + y^i \mathbf{e}_y^i + z^i \mathbf{e}_z^i + \mathbf{u}^i(x^i) + y^i \boldsymbol{\varphi}^i(x^i) \times \mathbf{e}_y^i + z^i \boldsymbol{\varphi}^i(x^i) \times \mathbf{e}_z^i. \quad (2)$$

Ker so bazni vektorji globalnega in lokalnih koordinatnih sistemov v nedeformirani legi nosilca identični, lahko lego DSP-nosilca v deformirani ravnotežni legi zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned}X^a &= x^a + u^a + z^a \varphi_y^a - y^a \varphi_z^a, \\ Y^a &= y^a + v^a - z^a \varphi_x^a, \\ Z^a &= z^a + w^a + y^a \varphi_x^a + h_t, \\ X^b &= x^b + u^b + z^b \varphi_y^b - y^b \varphi_z^b, \\ Y^b &= y^b + v^b - z^b \varphi_x^b, \\ Z^b &= z^b + w^b + y^b \varphi_x^b.\end{aligned}\quad (3)$$

Enačbe (1) oziroma (3) opisujejo deformacijsko preslikavo DSP-nosilca. Kot vidimo, preslikavo določa polje pomikov težiščnih osi $\mathbf{u}^i(x^i)$ in polje zasukov prečnih prereзов $\boldsymbol{\varphi}^i(x^i)$, ločeno za vsak i -ti sloj nosilca ($i=a,b$). Deformacijsko preslikavo pogosto izrazimo tudi s poljem pomikov $\mathbf{U}$ oziroma v primeru DSP-nosilca s poljema $\mathbf{U}^i$ ($i=a,b$). V globalni bazi ju izrazimo z enačbama

$$\mathbf{U}^i = U_x^i \mathbf{E}_x + U_y^i \mathbf{E}_y + U_z^i \mathbf{E}_z, \quad (4)$$

oziroma, ko upoštevamo enačbi (1) in (3), v obliki

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^a &= \mathbf{R}^a - h_t \mathbf{E}_z - x^a \mathbf{e}_x^a - y^a \mathbf{e}_y^a - z^a \mathbf{e}_z^a = \mathbf{u}^a + \boldsymbol{\varphi}^a \times \boldsymbol{\rho}^a, \\ \mathbf{U}^b &= \mathbf{R}^b - x^b \mathbf{e}_x^b - y^b \mathbf{e}_y^b - z^b \mathbf{e}_z^b = \mathbf{u}^b + \boldsymbol{\varphi}^b \times \boldsymbol{\rho}^b,\end{aligned}\quad (5)$$

kjer smo koordinatna vektorja v prečnem prerezu za posamezni sloj označili z $\boldsymbol{\rho}^i$ ($i=a,b$).

$$\boldsymbol{\rho}^i = y^i \mathbf{e}_y^i + z^i \mathbf{e}_z^i. \quad (6)$$

Komponentna oblika deformacijske preslikave, izražena s poljem pomikov, pa ima obliko:

$$\begin{aligned}U_x^a &= u^a + z^a \varphi_y^a - y^a \varphi_z^a, \\ U_y^a &= v^a - z^a \varphi_x^a, \\ U_z^a &= w^a + y^a \varphi_x^a, \\ U_x^b &= u^b + z^b \varphi_y^b - y^b \varphi_z^b, \\ U_y^b &= v^b - z^b \varphi_x^b, \\ U_z^b &= w^b + y^b \varphi_x^b.\end{aligned}\quad (7)$$

V skladu z izbiro lokalnih koordinatnih sistemov v nedeformirani legi nosilca velja:

$$\begin{aligned}x^a &= x^b = x, \\ y^a &= y^b = y\end{aligned}\quad (8)$$

in posledično deformacijsko preslikavo (7) lahko izrazimo v obliki:

$$\begin{aligned}U_x^a &= u^a + z^a \varphi_y^a - y \varphi_z^a, \\ U_y^a &= v^a - z^a \varphi_x^a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_x^a &= w^a + y \varphi_x^a, \\ U_x^b &= u^b + z^b \varphi_y^b - y \varphi_z^b, \\ U_y^b &= v^b - z^b \varphi_x^b, \\ U_z^b &= w^b + y \varphi_x^b. \end{aligned} \quad (9)$$

V enačbah (7) do (9) smo z u, v in w označili komponente pomikov težiščnih osi v smereh x, y in z ter z φ_x, φ_y in φ_z zasuke prečnih prerezov okoli osi x, y in z . Zgornja indeksa a in b označujeta posamezni sloj nosilca.

2.2 Osnovne enačbe homogenih slojev prostorskih nosilcev

Del osnovnih enačb DSP-nosilcev s podajnim stikom sestavljajo linearizirane posplošene ravnotežne enačbe homogenih prostorskih nosilcev. Ker so te dobro znane, jih povzamemo po literaturi (Hjelmstad, 2005). Sestavljajo jih kinematične, ravnotežne in konstitucijske enačbe z ustreznimi statičnimi in kinematičnimi robnimi pogoji ($i=a, b$).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i - u^{i'} &= 0, \\ \gamma_y^i - v^{i'} + \varphi_z^i &= 0, \\ \gamma_z^i - w^{i'} - \varphi_y^i &= 0, \\ \kappa_x^i - \varphi_x^{i'} &= 0, \\ \kappa_y^i - \varphi_y^{i'} &= 0, \\ \kappa_z^i - \varphi_z^{i'} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} N_x^{i'} + p_x^i &= 0, & N_x^i - N_{x,c}^i &= 0, \\ N_y^{i'} + p_y^i &= 0, & N_y^i - N_{y,c}^i &= 0, \\ N_z^{i'} + p_z^i &= 0, & N_z^i - N_{z,c}^i &= 0, \\ M_x^{i'} + m_x^i &= 0, & M_x^i - M_{x,c}^i &= 0, \\ M_y^{i'} - N_z^i + m_y^i &= 0, & M_y^i - M_{y,c}^i &= 0, \\ M_z^{i'} + N_y^i + m_z^i &= 0. \end{aligned} \quad (11) \quad M_z^i - M_{z,c}^i = 0 \quad (12)$$

+ robni pogoji.

Deformacijske količine smo označili z $\varepsilon_x^i, \gamma_y^i, \gamma_z^i, \kappa_x^i, \kappa_y^i$ in κ_z^i kjer smo z ε_x^i označili osni deformaciji, z γ_y^i in γ_z^i strižne deformacije, s κ_x^i torzijski deformaciji, s κ_y^i in κ_z^i pa upogibne deformacije vsakega sloja nosilca. Z $N_x^i, N_y^i, N_z^i, M_x^i, M_y^i$ in M_z^i smo označili dobro znane notranje statične količine, z $N_{x,c}^i, N_{y,c}^i, N_{z,c}^i, M_{x,c}^i, M_{y,c}^i$ in $M_{z,c}^i$ pa pripadajoče konstitucijske količine. Te so skladno s Hookovim zakonom določene z enačbami ($i=a, b$):

$$\begin{aligned} N_{x,c}^i &= E^i A_x^i \varepsilon_x^i, \\ N_{y,c}^i &= G^i A_{xy}^i \gamma_y^i = G^i A_y^i \gamma_y^i, \\ N_{z,c}^i &= G^i A_{xz}^i \gamma_z^i = G^i A_z^i \gamma_z^i, \\ M_{x,c}^i &= G^i I_x^i \kappa_x^i = G^i I_t^i \kappa_x^i, \\ M_{y,c}^i &= E^i I_y^i \kappa_y^i + E^i I_{yz}^i \kappa_z^i, \\ M_{z,c}^i &= E^i I_{yz}^i \kappa_y^i + E^i I_z^i \kappa_z^i, \end{aligned} \quad (13)$$

kjer smo z E^i in G^i označili elastični in strižni modul sloja a in sloja b obravnavanega nosilca, z A_x^i ploščini prečnih prerezov slojev, z I_x^i polarna vztrajnostna momenta ter z I_y^i, I_{yz}^i in I_z^i vztrajnostne momente prečnih prerezov slojev nosilca. S predstavljenim materialnim modelom, podobno kot pri homogenih

prostorskih nosilcih, precenimo strižno in torzijsko togost vsakega sloja nosilca. To pomanjkljivost odpravimo z uporabo t. i. strižnih prečnih prerezov vsakega sloja nosilca A_y^i in A_z^i kot to predlaga Cowper [Cowper, 1966], ter z zamenjavo polarnih vztrajnostnih momentov prečnih prerezov slojev s torzijskima vztrajnostnima momentoma slojev, ki vsebujeta tudi vpliv izbočitve prečnih prerezov slojev ($I_y^i \equiv I_y^i$) [Hjelmstad, 2005]. S p_y^i in p_z^i smo v enačbah (13) označili komponente linijske obtežbe vsakega sloja nosilca, z m_x^i, m_y^i in m_z^i pa linijske momentne obtežbe. Poudarimo pa, da so te komponente sestavljene iz zunanjih vplivov in sovprežnih vplivov na stiku med slojema nosilca.

2.3 Kinematične in deformacijske vezne enačbe DSP-nosilca

Povezano delovanje slojev DSP-nosilca zagotavljajo vezna sredstva. Ker pa je popolnoma tega povezavo med slojema nosilca z veznimi sredstvi praktično nemogoče zagotoviti, se sloja nosilca med deformiranjem razslojita. Oblika razslojevanja slojev med deformiranjem dvoslojnih nosilcev je v največji meri odvisna od izbire veznih sredstev in oblike zunanje obtežbe in s tem obremenitve veznih sredstev. Tu bomo predpostavili, da je prevladujoče le razslojevanje slojev v prečni in vzdolžni smeri, razslojevanje pravokotno na ravnino stika pa je zanemarljivo. Enačbe, s katerimi opišemo tako razslojevanje slojev obravnavanega nosilca, v nadaljevanju imenujemo kinematične vezne enačbe.

Glede na opisane predpostavke so kinematične vezne enačbe DSP-nosilca določene z zahtevo o soležnosti delcev slojev nosilca na stiku v deformirani legi. Skladno s to zahtevo v deformirani legi nosilca velja:

$$\mathbf{r}^a \left(x, y, -\frac{h^a}{2} \right) = \mathbf{r}^b \left(x^*, y^*, \frac{h^b}{2} \right) - \mathbf{h}, \quad (14)$$

kjer smo z x^* in y^* označili tisti lokalni koordinati delcev sloja b na stiku nosilca v nedeformirani legi, ki sta v deformirani legi soležni z delci na stiku sloja a . Seveda pa delci s koordinatami $(x, y, -\frac{h^a}{2})$ in $(x^*, y^*, \frac{h^b}{2})$ v nedeformirani legi nosilca niso soležni.

Kinematične vezne enačbe (14) v komponentni obliki so:

$$\begin{aligned} x + u^a - y \varphi_z^a - \frac{h^a}{2} \varphi_y^a &= x^* + u^{b*} - y^* \varphi_z^{b*} + \frac{h^b}{2} \varphi_y^{b*}, \\ y + v^a + \frac{h^a}{2} \varphi_x^a &= y^* + v^{b*} - \frac{h^b}{2} \varphi_x^{b*}, \\ -\frac{h^a}{2} + w^a + y \varphi_x^a &= \frac{h^b}{2} + w^{b*} + y^* \varphi_x^{b*} - h_t, \end{aligned} \quad (15)$$

kjer smo z zgornjim indeksom $(\cdot)^{b*}$ označili vrednost količine $(\cdot)^b$ za delec na težiščni osi sloja b z vzdolžno lokalno koordinato x^* , na primer $u^{b*} = u^b(x^*)$.

Ker v analizi DSP-nosilcev upoštevamo tudi strižno deformiranje nosilca, zasuki prečnih prerezov slojev niso pogojeni z deformiranimi težiščnima osema slojev obravnavanega nosilca. Zveze med zasuki prečnih prerezov slojev zato predpostavimo kot dodatne kinematične vezne enačbe:

$$\begin{aligned} \varphi_x^a &= \varphi_x^{b*}, \\ \varphi_y^a &= \varphi_y^{b*}, \\ \varphi_z^a &= \varphi_z^{b*}. \end{aligned} \quad (16)$$

Pri opisu deformirane lege DSP-nosilca smo predpostavili, da so pomiki in zasuki prečnih prereзов, ki jo določajo, 'majhni', zato so posledično 'majhni' tudi zamiki med slojema. Ob teh predpostavkah je smiselno, da nelinearne vezne enačbe (15) in (16) nadomestimo z linearnimi, te pa določimo z linearizacijo veznih enačb (15) in (16) okoli začetne nedeformirane lege DSP-nosilca. Po kratkem računu dobimo z uporabo smernega odvoda linearizirane kinematične vezne enačbe:

$$\begin{aligned}x + u^a &= x^* + u^b + h_t \varphi_y^a, \\y + v^a &= y^* + v^b - h_t \varphi_x^a, \\w^a &= w^b, \\\varphi_x^a &= \varphi_x^b, \\\varphi_y^a &= \varphi_y^b, \\\varphi_z^a &= \varphi_z^b.\end{aligned}\quad (17)$$

Zdaj definirajmo še vektor zamikov med slojema nosilca Δ . Tega potrebujemo v formulaciji konstitucijskih enačb na stiku med slojema nosilca oziroma za določitev mehanskih lastnosti veznih sredstev na stiku med slojema nosilca. Kot je dobro znano, z vektorjem zamikov določimo zamaknjeni legi delcev na stiku med slojema, ki sta v nedeformirani legi nosilca isto- ležni. Tako dobimo:

$$\Delta = \mathbf{r}^b \left(x, y, \frac{h^b}{2} \right) - \mathbf{h} - \mathbf{r}^a \left(x, y, -\frac{h^a}{2} \right) = \Delta_x \mathbf{E}_x + \Delta_y \mathbf{E}_y + \Delta_z \mathbf{E}_z. \quad (18)$$

S pomočjo kinematičnih veznih enačb (17) lahko komponente vektorja zamikov zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= x - x^*, \\\Delta_y &= y - y^*, \\\Delta_z &= 0,\end{aligned}\quad (19)$$

oziroma v obliki:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= u^b - u^a + h_t \varphi_y^a, \\\Delta_y &= v^b - v^a - h_t \varphi_x^a, \\\Delta_z &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

S pomočjo kinematičnih veznih enačb (17) in kinematičnih enačb DSP-nosilca (10) izpeljemo tudi t. i. deformacijske vezne enačbe obravnavanega nosilca. Po kratkem računu te dobijo obliko:

$$\begin{aligned}1 + \varepsilon_x^a - h_t \kappa_y^a &= x^{*'} + \varepsilon_x^b, \\\gamma_y^a + h_t \kappa_x^a &= y^{*'} + \gamma_y^b,\end{aligned}\quad (21)$$

skupaj z

$$\begin{aligned}\gamma_z^a &= \gamma_z^b, \\\kappa_x^a &= \kappa_x^b, \\\kappa_y^a &= \kappa_y^b, \\\kappa_z^a &= \kappa_z^b.\end{aligned}\quad (22)$$

2.4 Kinematične enačbe DSP-nosilca

S pomočjo kinematičnih veznih enačb (17) lahko preoblikujemo tudi kinematične enačbe DSP-nosilca (10). S preprostim računom dobimo zelo prepoznavne zveze:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^a &= u^{a'}, \\\gamma_y^a &= v^{a'} - \varphi_x^a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_z^a &= w^{a'} + \varphi_y^a, \\\kappa_x^a &= \varphi_x^{a'}, \\\kappa_y^a &= \varphi_y^{a'}, \\\kappa_z^a &= \varphi_z^{a'}, \\\varepsilon_x^b &= u^{b'}, \\\gamma_y^b &= v^{b'} - \varphi_x^b,\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}w^a &= w^b, \\\varphi_x^a &= \varphi_x^b, \\\varphi_y^a &= \varphi_y^b, \\\varphi_z^a &= \varphi_z^b.\end{aligned}\quad (24)$$

V nadaljevanju enačbe (23) imenujemo kinematične enačbe DSP-nosilca s podajno povezavo med sloji, enačbe (24) pa določajo oziroma omejujejo neodvisnost kinematičnih robnih pogojev. Tako velja, če smo na robu nosilca predpisali w^a , smo dejansko predpisali tudi w^b . Podobna je seveda tudi relacija glede predpisanih zasukov prečnih prereзов slojev nosilca. Tako smo zaradi veznih enačb število kinematičnih robnih pogojev zmanjšali s 24 na 16.

Zadnjo skupino veznih enačb v teoriji DSP-nosilcev s podajnim stikom med slojema predstavljajo t. i. konstitucijske vezne enačbe. S temi enačbami opišemo podajnost oziroma togost stika in upoštevamo mehanske lastnosti veznih sredstev. Te enačbe predstavljajo zveze med napetostnimi vektorji in vektorji zamikov na stiku med slojema. Zveze in pripadajoče materialne parametre določimo z meritvami. Ravnotežni pogoj na stiku med slojema nosilca določa enačba:

$$\mathbf{q}_k^a dp^a + \mathbf{q}_k^b dp^b = \mathbf{0}, \quad (25)$$

kjer smo z $\mathbf{q}_k^a$ označili napetostni vektor sloja a , z $\mathbf{q}_k^b$ napetostni vektor sloja b , z dp^a in dp^b pa smo označili diferenciala ploščin na stiku med slojema nosilca. Ker sta diferenciala ploščine enaka, velja:

$$\mathbf{q}_k^a + \mathbf{q}_k^b = \mathbf{0}, \quad (26)$$

oziroma v komponentni obliki:

$$\begin{aligned}q_{x,k}^a + q_{x,k}^b &= 0, \\q_{y,k}^a + q_{y,k}^b &= 0, \\q_{z,k}^a + q_{z,k}^b &= 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Konstitucijski zvezi predpostavimo le za komponenti v smeri koordinate x in koordinate y , saj se sloja v ravnini stika lahko zamakneta le v vzdolžni in prečni smeri. Relativno splošno obliko konstitucijskih veznih enačb na stiku med slojema nosilca lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned}q_{x,k}^a &= -q_{x,k}^b = q_{x,c}(\Delta_x, \Delta_y, x), \\q_{y,k}^a &= -q_{y,k}^b = q_{y,c}(\Delta_x, \Delta_y, x),\end{aligned}\quad (28)$$

kjer smo predpostavili, da je zveza neodvisna od y . Pri linijskih konstrukcijah brez velike izgube na splošnosti predpostavimo tudi, da sta konstitucijski zvezi v prečni in vzdolžni smeri nepovezani, torej:

$$\begin{aligned}q_{x,k}^a &= -q_{x,k}^b = q_{x,c}(\Delta_x, x), \\q_{y,k}^a &= -q_{y,k}^b = q_{y,c}(\Delta_y, x).\end{aligned}\quad (29)$$

Najpreprostejši konstitucijski zakon stika, ki pa se v analizi DSP-nosilcev tudi najpogosteje uporablja, je linearna konstitucijska zveza na stiku med slojema. V primeru, če se ta vzdolž osi nosilca ne spreminja, dobi konstitucijska vezna enačba na stiku med slojema prepoznavno preprosto obliko:

$$q_{x,c} = k_x \Delta_x, \\ q_{y,c} = k_y \Delta_y, \quad (30)$$

kjer materialna parametra k_x in k_y predstavljata togost veznih sredstev na stiku med slojema DSP-nosilca.

2.5 Ravnotežne enačbe DSP-nosilca

Ravnotežne enačbe in pripadajoče statične robne pogoje DSP-nosilca bomo izpeljali s pomočjo izreka o virtualnem delu za linijske konstrukcije in s pomočjo kinematičnih veznih enačb (17). Izhodišče izpeljave predstavlja izrek o virtualnem delu. Virtualno delo DSP-nosilca je vsota virtualnega dela posameznega sloja tega nosilca, torej je $i=(a,b)$:

$$\delta W_n = \delta W_z, \\ \delta W_n = \delta W_n^a + \delta W_n^b, \quad \delta W_z = \delta W_z^a + \delta W_z^b, \quad (31)$$

kjer je:

$$\delta W_n^i = \int_0^L (N_x^i \delta \varepsilon_x^i + N_y^i \delta \gamma_y^i + N_z^i \delta \gamma_z^i + M_x^i \delta \kappa_x^i + M_y^i \delta \kappa_y^i + M_z^i \delta \kappa_z^i) d\xi, \quad (32)$$

$$\delta W_z^i = \int_0^L (p_x^i \delta u^i + p_y^i \delta v^i + p_z^i \delta w^i + m_x^i \delta \varphi_x^i + m_y^i \delta \varphi_y^i + m_z^i \delta \varphi_z^i) d\xi + \\ F_{x,0}^i \delta u^i(0) + F_{y,0}^i \delta v^i(0) + F_{z,0}^i \delta w^i(0) + M_{x,0}^i \delta \varphi_x^i(0) + M_{y,0}^i \delta \varphi_y^i(0) + \\ M_{z,0}^i \delta \varphi_z^i(0) + F_{x,L}^i \delta u^i(L) + F_{y,L}^i \delta v^i(L) + F_{z,L}^i \delta w^i(L) + M_{x,L}^i \delta \varphi_x^i(L) + \\ M_{y,L}^i \delta \varphi_y^i(L) + M_{z,L}^i \delta \varphi_z^i(L). \quad (33)$$

S pomočjo variacij kinematičnih enačb DSP-nosilca (23) in (24)

$$\delta \varepsilon_x^a = \delta u^{a'}, \quad \delta \varepsilon_x^b = \delta u^{b'}, \\ \delta \gamma_y^a = \delta v^{a'} - \delta \varphi_z^a, \quad \delta \gamma_y^b = \delta v^{b'} - \delta \varphi_z^b, \\ \delta \gamma_z^a = \delta w^{a'} + \delta \varphi_y^a, \quad \delta \gamma_z^b = \delta w^{b'} + \delta \varphi_y^b, \\ \delta \kappa_x^a = \delta \varphi_x^{a'}, \quad \delta \kappa_x^b = \delta \varphi_x^{b'}, \\ \delta \kappa_y^a = \delta \varphi_y^{a'}, \quad \delta \kappa_y^b = \delta \varphi_y^{b'}, \\ \delta \kappa_z^a = \delta \varphi_z^{a'}, \quad \delta \kappa_z^b = \delta \varphi_z^{b'}, \quad (34)$$

in variacij dela deformacijskih veznih enačb (22)

$$\delta \gamma_z^b = \delta \gamma_z^a, \\ \delta \kappa_x^b = \delta \kappa_x^a, \\ \delta \kappa_y^b = \delta \kappa_y^a, \\ \delta \kappa_z^b = \delta \kappa_z^a, \quad (35)$$

najprej preoblikujemo virtualno delo notranjih sil DSP-nosilca (32). Ko variacije (34) in (35) vstavimo v izraz za δW_n in ko z integracijo po delih integriramo člene z $\delta u^{a'}$, $\delta v^{a'}$, $\delta w^{a'}$, $\delta \varphi_x^{a'}$, $\delta \varphi_y^{a'}$, $\delta \varphi_z^{a'}$, $\delta v^{b'}$ in $\delta v^{b'}$, dobimo:

$$\delta W_n = - \int_0^L (N_x^{a'} \delta u^a + N_y^{a'} \delta v^a + N_z^{a'} \delta w^a + M_x^{a'} \delta \varphi_x^a + M_y^{a'} \delta \varphi_y^a + \\ M_z^{a'} \delta \varphi_z^a + N_x^{b'} \delta u^b + N_y^{b'} \delta v^b + (N_y^a + N_y^b) \delta \varphi_z^a - N_z \delta \varphi_y^a) d\xi + \\ N_x^a(L) \delta u^a(L) - N_x^a(0) \delta u^a(0) + N_y^a(L) \delta v^a(L) - N_y^a(0) \delta v^a(0) +$$

$$N_z(L) \delta w^a(L) - N_z(0) \delta w^a(0) + M_x(L) \delta \varphi_x^a(L) - M_x(0) \delta \varphi_x^a(0) + \\ M_y(L) \delta \varphi_y^a(L) - M_y(0) \delta \varphi_y^a(0) + M_z(L) \delta \varphi_z^a(L) - M_z(0) \delta \varphi_z^a(0) + \\ N_x^b(L) \delta u^b(L) - N_x^b(0) \delta u^b(0) + N_y^b(L) \delta v^b(L) - N_y^b(0) \delta v^b(0), \quad (36)$$

kjer smo vsoto komponent statičnih količin slojev a in b obravnavanega nosilca označili z:

$$N_z = N_z^a + N_z^b, \\ M_x = M_x^a + M_x^b, \\ M_y = M_y^a + M_y^b, \\ M_z = M_z^a + M_z^b. \quad (37)$$

Kot smo že povedali, sta linijska obtežba in linijska momentna obtežba sestavljeni iz zunanjih vplivov in sovprežnega vpliva slojev na stiku nosilca. Te vplive v težiščih slojev a in b zapišemo v obliki ($i=a,b$):

$$p_x^i = p_{x,z}^i + p_{x,k}^i, \\ p_y^i = p_{y,z}^i + p_{y,k}^i, \\ p_z^i = p_{z,z}^i + p_{z,k}^i, \\ m_x^i = m_{x,z}^i + m_{x,k}^i, \\ m_y^i = m_{y,z}^i + m_{y,k}^i, \\ m_z^i = m_{z,z}^i + m_{z,k}^i. \quad (38)$$

V enačbah (38) smo vplive okolice na obravnavani nosilec označili z indeksom $(\cdot)_{,z}$, sovprežne vplive med slojema na stiku nosilca pa z indeksom $(\cdot)_{,k}$. Ko v izrazu za virtualno delo zunanjih sil δW_z upoštevamo variacije kinematičnih enačb DSP-nosilca (34), za δW_z dobimo izraz:

$$\delta W_z = \int_0^L (p_x^a \delta u^a + p_y^a \delta v^a + p_z^a \delta u^b + p_y^b \delta v^b + (p_{z,z}^a + p_{z,z}^b) \delta w^a + \\ (m_{x,z}^a + m_{x,z}^b + h_t p_{y,k}^a) \delta \varphi_x^a + (m_{y,z}^a + m_{y,z}^b - h_t p_{x,k}^a) \delta \varphi_y^a + \\ (m_{z,z}^a + m_{z,z}^b) \delta \varphi_z^a) d\xi + \\ F_{x,0}^a \delta u^a(0) + F_{x,0}^b \delta u^b(0) + F_{y,0}^a \delta v^a(0) + F_{y,0}^b \delta v^b(0) + \\ (F_{z,0}^a + F_{z,0}^b) \delta w^a(0) + (M_{x,0}^a + M_{x,0}^b) \delta \varphi_x^a(0) + (M_{y,0}^a + M_{y,0}^b) \delta \varphi_y^a(0) + \\ (M_{z,0}^a + M_{z,0}^b) \delta \varphi_z^a(0) + F_{x,L}^a \delta u^a(L) + F_{x,L}^b \delta u^b(L) + F_{y,L}^a \delta v^a(L) + \\ F_{y,L}^b \delta v^b(L) + (F_{z,L}^a + F_{z,L}^b) \delta w^a(L) + (M_{x,L}^a + M_{x,L}^b) \delta \varphi_x^a(L) + \\ (M_{y,L}^a + M_{y,L}^b) \delta \varphi_y^a(L) + (M_{z,L}^a + M_{z,L}^b) \delta \varphi_z^a(L). \quad (39)$$

Tako preoblikovane izraze za δW_n in δW_z upoštevamo v izreku o virtualnih pomikih za DSP-nosilce (31). Ob upoštevanju variacij kot poljubnih in neodvisnih količin, dobimo skladno s postopki variacijskega računa ravnotežne enačbe DSP-nosilcev in statične robne pogoje. Poudarimo pa, da smo na tak način v izpeljavi ravnotežnih enačb konsistentno upoštevali, kot pravimo, kinematične vezne enačbe (17). Ravnotežne enačbe DSP-nosilca s podajnim stikom med slojema so:

$$N_x^{a'} + p_{x,z}^a + p_{x,k}^a = 0, \\ N_y^{a'} + p_{y,z}^a + p_{y,k}^a = 0, \\ N_z^{a'} + p_{z,z}^a + p_{z,k}^a = 0, \\ M_x^{a'} + m_{x,z}^a + m_{x,k}^a + h_t p_{y,k}^a = 0, \\ M_y^{a'} - N_z + m_{y,z}^a + m_{y,k}^a - h_t p_{x,k}^a = 0,$$

$$M_z' + N_y^a + N_y^b + m_{z,z}^a + m_{z,z}^b = 0,$$

$$N_x^b + p_{x,z}^b + p_{x,k}^b = 0,$$

$$N_y^b + p_{y,z}^b + p_{y,k}^b = 0.$$

Pripadajoči statični robni pogoji pa so:

$$\begin{aligned} N_x^a(0) - F_{x,0}^a &= 0, & N_x^a(L) + F_{x,L}^a &= 0, \\ N_y^a(0) - F_{y,0}^a &= 0, & N_y^a(L) + F_{y,L}^a &= 0, \\ N_z(0) - F_{z,0} &= 0, & N_z(L) + F_{z,L} &= 0, \\ M_x(0) - M_{x,0} &= 0, & M_x(L) + M_{x,L} &= 0, \\ M_y(0) - M_{y,0} &= 0, & M_y(L) + M_{y,L} &= 0, \\ M_z(0) - M_{z,0} &= 0, & M_z(L) + M_{z,L} &= 0, \\ N_x^b(0) - F_{x,0}^b &= 0, & N_x^b(L) + F_{x,L}^b &= 0, \\ N_y^b(0) - F_{y,0}^b &= 0, & N_y^b(L) + F_{y,L}^b &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Tudi v izrazih (41) smo vsote zunanjih točkovnih sil in momentov na robovih slojev obravnavanega nosilca izrazili z novo oznako, na primer $F_{z,0} = F_{z,0}^a + F_{z,0}^b$, kar je seveda skladno s pripadajočimi kinematičnimi robnimi pogoji DSP-nosilcev.

2.6 Konstitucijske enačbe DSP-nosilca

V tem poglavju s pomočjo kinematičnih veznih enačb (17) preoblikujemo tudi konstitucijske enačbe DSP-nosilca (13), pri čemer uporabimo del deformacijskih veznih enačb (22). Te so:

$$\begin{aligned} \gamma_z^a &= \gamma_z^b, \\ \kappa_x^a &= \kappa_x^b, \\ \kappa_y^a &= \kappa_y^b, \\ \kappa_z^a &= \kappa_z^b. \end{aligned} \quad (42)$$

Ko enačbe (42) vstavimo v izraze za konstitucijske količine (13), dobimo:

$$\begin{aligned} N_{x,c}^a &= E^a A_x^a \varepsilon_x^a, & N_{x,c}^b &= E^b A_x^b \varepsilon_x^b, \\ N_{y,c}^a &= G^a A_y^a \gamma_y^a, & N_{y,c}^b &= G^b A_y^b \gamma_y^b, \\ N_{z,c}^a &= G^a A_z^a \gamma_z^a, & N_{z,c}^b &= G^b A_z^b \gamma_z^b, \\ M_{x,c}^a &= G^a I_x^a \kappa_x^a, & M_{x,c}^b &= G^b I_x^b \kappa_x^b, \\ M_{y,c}^a &= E^a I_y^a \kappa_y^a + E^a I_{yz}^a \kappa_z^a, & M_{y,c}^b &= E^b I_y^b \kappa_y^b + E^b I_{yz}^b \kappa_z^b, \\ M_{z,c}^a &= E^a I_{yz}^a \kappa_y^a + E^a I_z^a \kappa_z^a, & M_{z,c}^b &= E^b I_{yz}^b \kappa_y^b + E^b I_z^b \kappa_z^b. \end{aligned} \quad (43)$$

V ravnotežnih enačbah DSP-nosilca (40) nastopajo vsota prečne sile slojev a in b v smeri z , $N_z = N_z^a + N_z^b$, vsota torzijskih momentov M_x in vsota upogibnih momentov M_y in M_z . Skladno s tem preoblikujemo tudi konstitucijske zveze (43). Po kratkem računu dobimo:

$$\begin{aligned} N_{x,c}^a &= E^a A_x^a \varepsilon_x^a, \\ N_{y,c}^a &= G^a A_y^a \gamma_y^a, \\ N_{z,c} &= N_{z,c}^a + N_{z,c}^b = G^a A_z^a \gamma_z^a + G^b A_z^b \gamma_z^b = \\ &= G^a \left(A_z^a + \frac{G^b}{G^a} A_z^b \right) \gamma_z^a = G^a A_{z,eff} \gamma_z^a, \\ M_{x,c} &= M_{x,c}^a + M_{x,c}^b = G^a I_x^a \kappa_x^a + G^b I_x^b \kappa_x^b = \\ &= G^a \left(I_x^a + \frac{G^b}{G^a} I_x^b \right) \kappa_x^a = G^a I_{t,eff} \kappa_x^a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{y,c} &= M_{y,c}^a + M_{y,c}^b = E^a I_y^a \kappa_y^a + E^a I_{yz}^a \kappa_z^a + E^b I_y^b \kappa_y^b + E^b I_{yz}^b \kappa_z^b = \\ &= E^a \left(I_y^a + \frac{E^b}{E^a} I_y^b \right) \kappa_y^a + E^a \left(I_{yz}^a + \frac{E^b}{E^a} I_{yz}^b \right) \kappa_z^a = \\ &= E^a I_{y,eff} \kappa_y^a + E^a I_{yz,eff} \kappa_z^a, \\ M_{z,c} &= M_{z,c}^a + M_{z,c}^b = E^a I_{yz}^a \kappa_y^a + E^a I_z^a \kappa_z^a + E^b I_{yz}^b \kappa_y^b + E^b I_z^b \kappa_z^b = \\ &= E^a \left(I_{yz}^a + \frac{E^b}{E^a} I_{yz}^b \right) \kappa_y^a + E^a \left(I_z^a + \frac{E^b}{E^a} I_z^b \right) \kappa_z^a = \\ &= E^a I_{yz,eff} \kappa_y^a + E^a I_{z,eff} \kappa_z^a, \\ N_{x,c}^b &= E^b A_x^b \varepsilon_x^b, \\ N_{y,c}^b &= G^b A_y^b \gamma_y^b. \end{aligned} \quad (44)$$

Sistem enačb (44) sestavlja osem linearnih enačb, ki povezujejo osem konstitucijskih količin ($N_{x,c}^a, N_{y,c}^a, N_{z,c}^a, M_{x,c}^a, M_{y,c}^a, M_{z,c}^a, N_{x,c}^b, N_{y,c}^b$) z osmimi deformacijskimi količinami ($\varepsilon_x^a, \gamma_y^a, \gamma_z^a, \kappa_x^a, \kappa_y^a, \kappa_z^a, \varepsilon_x^b, \gamma_y^b$). Ko konstitucijske količine DSP-nosilca izenačimo z ravnotežnimi oziroma statičnimi količinami nosilca ($N_x^a, N_y^a, N_z^a, M_x^a, M_y^a, M_z^a$ in $N_x^b, N_y^b, N_z^b, M_x^b, M_y^b, M_z^b$), dobimo konstitucijske enačbe DSP-nosilca

$$\begin{aligned} N_{x,c}^a &= N_x^a, \\ N_{y,c}^a &= N_y^a, \\ N_{z,c} &= N_z, \\ M_{x,c} &= M_x, \\ M_{y,c} &= M_y, \\ M_{z,c} &= M_z, \\ N_{x,c}^b &= N_x^b, \\ N_{y,c}^b &= N_y^b. \end{aligned} \quad (45)$$

Podobno, kot smo s pomočjo Hookovega zakona izpeljali konstitucijske enačbe DSP-nosilcev, izpeljemo tudi vezne konstitucijske enačbe obravnavanega nosilca. Izhodišče izpeljave predstavljata konstitucijski zvezi med slojema nosilca na stiku v prečni in vzdolžni smeri (29).

$$\begin{aligned} q_{x,k}^a &= -q_{x,k}^b = q_x = q_{x,c}, \\ q_{y,k}^a &= -q_{y,k}^b = q_y = q_{y,c}. \end{aligned} \quad (46)$$

Z q_x in q_y smo označili ravnotežni komponenti ploskovne obremenitve na stiku med slojema prostorskega nosilca, z $q_{x,c}$ in $q_{y,c}$ pa njuna konstitucijska izraza. V nadaljevanju obremenitvi q_x in q_y po znanih postopkih statično enakovredno prenesemo v težiščno os sloja a in sloja b obravnavanega nosilca. Tako dobimo kontaktno linijsko in kontaktno momentno linijsko obtežbo slojev a in b DSP-nosilca.

$$\begin{aligned} p_{x,k}^a &= -p_{x,k}^b = \int_{b_k} q_x dy, \\ p_{y,k}^a &= -p_{y,k}^b = \int_{b_k} q_y dy, \\ p_{z,k}^a &= -p_{z,k}^b = \int_{b_k} q_z dy, \\ m_{x,k}^a &= \int_{b_k} (y q_z - z q_y) dy, & m_{x,k}^b &= \int_{b_k} (z q_y - y q_z) dy, \\ m_{y,k}^a &= - \int_{b_k} z q_x dy, & m_{y,k}^b &= \int_{b_k} z q_x dy, \\ m_{z,k}^a &= - \int_{b_k} y q_x dy, & m_{z,k}^b &= \int_{b_k} y q_x dy. \end{aligned} \quad (47)$$

Izraz q_z v enačbi (47) označuje ravnotežno komponento ploskovne obremenitve na stiku med slojema prostorskega nosilca v smeri koordinate z , z_y in z smo označili razdalji med lego delovanja vektorja komponentne ploskovne obremenitve in težiščem posameznega sloja, z_k pa smo označili širino kontakta v prečnem prerezu. $p_{x,k}^a$, $p_{x,k}^b$, $p_{y,k}^a$, $p_{y,k}^b$, $p_{z,k}^a$ in $p_{z,k}^b$ so linijske kontaktne obremenitve, $m_{x,k}^a$, $m_{x,k}^b$, $m_{y,k}^a$, $m_{y,k}^b$, $m_{z,k}^a$ in $m_{z,k}^b$ pa momentne linijske kontaktne obremenitve nosilca zaradi sovprežnega delovanja slojev.

V ravnotežnih enačbah DSP-nosilca (40) ne potrebujemo vseh komponent kontaktne linijske obremenitve in kontaktne momentne linijske obremenitve, saj so zaradi ravnotežja na stiku določene vsote teh enake nič. Tako v analizi dejansko potrebujemo le komponenti:

$$\begin{aligned} p_{x,k}^a &= -p_{x,k}^b = p_{x,k,c}^a = \int_{b_k} q_{x,c} dy, \\ p_{y,k}^a &= -p_{y,k}^b = p_{y,k,c}^a = \int_{b_k} q_{y,c} dy. \end{aligned} \quad (48)$$

Ker smo za konstitucijski količini $q_{x,c}$ in $q_{y,c}$, ki sta odvisni od zamikov na stiku med slojema obravnavanega nosilca, izbrali nelinearni zvezi (29), sta tudi konstitucijski zvezi (48) nelinearni.

$$\begin{aligned} p_{x,k}^a &= p_{x,k,c}^a = p_{x,k,c}^a(\Delta_x, x), \\ p_{y,k}^a &= p_{y,k,c}^a = p_{y,k,c}^a(\Delta_y, x). \end{aligned} \quad (49)$$

Posledično so nelinearne konstitucijske zveze za vse linijske kontaktne obremenitve in momentne linijske kontaktne obremenitve. Na koncu predstavimo še najpreprostejši linearni zvezi, ki se tudi največkrat uporabljata:

$$\begin{aligned} p_{x,k}^a &= b_k k_x \Delta_x = K_x \Delta_x, \\ p_{y,k}^a &= b_k k_y \Delta_y = K_y \Delta_y. \end{aligned} \quad (50)$$

2.7 Posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca

Posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca smo izpeljali z uporabo posplošenih ravnotežnih enačb za prostorski nosilec (10) do (12) in z uporabo veznih enačb (17). Glavna značilnost tako izpeljanih posplošenih ravnotežnih enačb DSP-nosilca je v tem, da ga sestavljata dva povsem nepovezana sistema enačb. Prvi sistem enačb sestavlja 24 algebraskih in diferencialnih enačb, drugega pa 16 enačb. Enačb v obeh sistemih skupaj je sicer več, kot je izhodiščnih enačb (36 enačb), vendar to povečanje števila enačb ni bistveno, saj je to le posledica dodatnih količin. Te so N_z , M_x , M_y in M_z , ki predstavljajo vsote ustreznih statičnih količin slojev nosilca, na primer $N_z = N_z^a + N_z^b$. Le prvo skupino enačb v nadaljevanju imenujemo posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca (enačbe (51) do (53)). Sestavljene so iz kinematičnih, ravnotežnih in konstitucijskih enačb ter iz ustreznih kinematičnih in statičnih robnih pogojev. Zaradi veznih enačb je tudi robnih pogojev manj, le šestnajst. Posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca s podajnim stikom v vzdolžni in prečni smeri so:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^a &= u^{a'}, \\ \gamma_y^a &= v^{a'} - \varphi_z^a, \\ \gamma_z^a &= w^{a'} + \varphi_y^a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_x^a &= \varphi_x^{a'}, \\ \kappa_y^a &= \varphi_y^{a'}, \\ \kappa_z^a &= \varphi_z^{a'}, \\ \varepsilon_x^b &= u^{b'}, \\ \gamma_y^b &= v^{b'} - \varphi_z^a, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} N_x^{a'} + p_{x,z}^a + p_{x,k}^a &= 0, \\ N_y^{a'} + p_{y,z}^a + p_{y,k}^a &= 0, \\ N_z^{a'} + p_{z,z}^a + p_{z,k}^a &= 0, \\ M_x^{a'} + m_{x,z}^a + m_{x,k}^a + h_t p_{y,k}^a &= 0, \\ M_y^{a'} - N_z + m_{y,z}^a + m_{y,k}^a - h_t p_{x,k}^a &= 0, \\ M_z^{a'} + N_y^a + N_y^b + m_{z,z}^a + m_{z,k}^b &= 0, \\ N_x^{b'} + p_{x,z}^b + p_{x,k}^b &= 0, \\ N_y^{b'} + p_{y,z}^b + p_{y,k}^b &= 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} N_x^a &= E^a A_x^a \varepsilon_x^a, \\ N_y^a &= G^a A_y^a \gamma_y^a, \\ N_z &= G^a A_{z,eff} \gamma_z^a, \\ M_x &= G^a I_{t,eff} \kappa_x^a, \\ M_y &= E^a I_{y,eff} \kappa_y^a + E^a I_{yz,eff} \kappa_z^a, \\ M_z &= E^a I_{yz,eff} \kappa_y^a + E^a I_{z,eff} \kappa_z^a, \\ N_x^b &= E^b A_x^b \varepsilon_x^b, \\ N_y^b &= G^b A_y^b \gamma_y^b. \end{aligned} \quad (53)$$

Posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca tako sestavlja le 24 diferencialnih in algebraskih enačb za prav toliko neznanih količin: ε_x^a , γ_y^a , γ_z^a , κ_x^a , κ_y^a , κ_z^a , ε_x^b , γ_y^b , N_x^a , N_y^a , N_z , M_x , M_y , M_z , N_x^b , N_y^b , u^a , v^a , w^a , φ_x^a , φ_y^a , φ_z^a , u^b in v^b . Vse neznane količine DSP-nosilca so neodvisne od koordinat y in z . V enačbah (52) so komponente linijske kontaktne obremenitve odvisne od zamikov:

$$\begin{aligned} p_{x,k}^a &= -p_{x,k}^b = p_{x,k,c}^a(\Delta_x, x), \\ p_{y,k}^a &= -p_{y,k}^b = p_{y,k,c}^a(\Delta_y, x), \\ \Delta_x &= u^b - u^a + h_t \varphi_y^a, \\ \Delta_y &= v^b - v^a - h_t \varphi_x^a. \end{aligned} \quad (54)$$

Pripadajoči robni pogoji navadnih diferencialnih enačb, ki sestavljajo posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca, so sestavljeni iz kinematičnih in statičnih. Velja pa, da tam, kjer predpišemo kinematične robne pogoje, ne moremo predpisati statičnih. Statične robne pogoje posledično lahko izberemo le tam, kjer niso predpisane kinematični. Robni pogoji k enačbam (51) do (53) so:

$$\begin{aligned} u^a(0) &= u_0^a & N_x^a(0) - F_{x,0}^a &= 0, \\ v^a(0) &= v_0^a & N_y^a(0) - F_{y,0}^a &= 0, \\ w^a(0) &= w_0^a & N_z(0) - F_{z,0} &= 0, \\ \varphi_x^a(0) &= \varphi_{x,0}^a & M_x(0) - M_{x,0} &= 0, \\ \varphi_y^a(0) &= \varphi_{y,0}^a & M_y(0) - M_{y,0} &= 0, \\ \varphi_z^a(0) &= \varphi_{z,0}^a & M_z(0) - M_{z,0} &= 0, \\ u^b(0) &= u_0^b & N_x^b(0) - F_{x,0}^b &= 0, \\ v^b(0) &= v_0^b & N_y^b(0) - F_{y,0}^b &= 0, \end{aligned} \quad \text{ali} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
 u^a(L) &= u_L^a & N_x^a(L) + F_{x,L}^a &= 0, \\
 v^a(L) &= v_L^a & N_y^a(L) + F_{y,L}^a &= 0, \\
 w^a(L) &= w_L^a & N_z(L) + F_{z,L} &= 0, \\
 \varphi_x^a(L) &= \varphi_{x,L}^a & M_x(L) + M_{x,L} &= 0, \\
 \varphi_y^a(L) &= \varphi_{y,L}^a & M_y(L) + M_{y,L} &= 0, \\
 \varphi_z^a(L) &= \varphi_{z,L}^a & M_z(L) + M_{z,L} &= 0, \\
 u^b(L) &= u_L^b & N_x^b(L) + F_{x,L}^b &= 0, \\
 v^b(L) &= v_L^b & N_y^b(L) + F_{y,L}^b &= 0.
 \end{aligned} \quad (56)$$

Preostale neznane količine, ki so del napetostnega in deformacijskega stanja DSP-nosilca, izračunamo s t. i. postopkom »postprocesiranja« potem, ko smo rešili posplošene ravnotežne enačbe (51) do (53). Z zaporednim in nepovezanim reševanjem posplošenih ravnotežnih enačb (51) do (53) in dodatnih posplošenih ravnotežnih enačb smo se izognili vplivom singularnosti oziroma slabe pogojenosti enačb, ki so posledica veznih enačb (17). Dodatne posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca so:

$$\begin{aligned}
 w^b &= w^a, & \gamma_z^b &= \gamma_z^a, \\
 \varphi_x^b &= \varphi_x^a, & \kappa_x^b &= \kappa_x^a, \\
 \varphi_y^b &= \varphi_y^a, & \kappa_y^b &= \kappa_y^a, \\
 \varphi_z^b &= \varphi_z^a, & \kappa_z^b &= \kappa_z^a,
 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned}
 N_z^a &= G^a A_z^a \gamma_z^a, \\
 M_x^a &= G^a I_x^a \kappa_x^a, \\
 M_y^a &= E^a I_y^a \kappa_y^a + E^a I_{yz}^a \kappa_z^a, \\
 M_z^a &= E^a I_{yz}^a \kappa_y^a + E^a I_z^a \kappa_z^a, \\
 N_z^b &= N_z - N_z^a = G^b A_z^b \gamma_z^a, \\
 M_x^b &= M_x - M_x^a = G^b I_x^b \kappa_x^a, \\
 M_y^b &= M_y - M_y^a = E^b I_y^b \kappa_y^a + E^b I_{yz}^b \kappa_z^a, \\
 M_z^b &= M_z - M_z^a = E^b I_{yz}^b \kappa_y^a + E^b I_z^b \kappa_z^a.
 \end{aligned} \quad (60)$$

Dodatni sistem posplošenih ravnotežnih enačb (57) do (60) sestavlja 16 algebrskih enačb za določitev prav toliko neznanih količin: $\gamma_z^b, \kappa_x^b, \kappa_y^b, \kappa_z^b, N_z^a, M_x^a, M_y^a, M_z^a, N_z^b, M_x^b, M_y^b, M_z^b, w^b, \varphi_x^b, \varphi_y^b$ in φ_z^b .

S pomočjo ravnotežnih enačb v fazi »postprocesiranja« izračunamo tudi komponenti linijske kontaktne obtežbe:

$$\begin{aligned}
 p_{z,k}^a &= -p_{z,z}^a - N_z^{a'}, \\
 p_{z,k}^b &= -p_{z,z}^b - N_z^{b'} = -p_{z,k}^a,
 \end{aligned} \quad (61)$$

po potrebi pa lahko v fazi »postprocesiranja« izračunamo tudi koordinati sloja b DSP-nosilca, ki določata istoležne delce nosilca v deformirani legi:

$$\begin{aligned}
 x^* &= x - \Delta_x = x - u^b + u^a - h_t \varphi_y^a, \\
 y^* &= y - \Delta_y = y - v^b + v^a + h_t \varphi_x^a.
 \end{aligned} \quad (62)$$

3 DEFORMACIJSKA METODA KONČNIH ELEMENTOV

3.1 Modificiran izrek o virtualnem delu

Posplošene ravnotežne enačbe DSP-nosilca (51) do (53) so nelinearne in jih zato ne znamo rešiti točno. V tem delu jih bomo

rešili z deformacijsko metodo končnih elementov. To je za analizo dvoslojnih ravninskih nosilcev v svoji doktorski nalogi natančno predstavil Čas [Čas, 2004].

Osnovna ideja reševanja posplošenih ravnotežnih enačb z deformacijsko metodo končnih elementov je v tem, da skušamo relativno preprosto strukturo kinematičnih in ravnotežnih enačb za analizo DSP-nosilcev izkoristiti v postopku reševanja. V nadaljevanju postopek reševanja podrobno predstavimo. Ko predpostavimo, da poznamo deformacijske količine DSP-nosilca, postanejo kinematične in ravnotežne enačbe nepovezane. Ker so kinematične enačbe navadne diferencialne enačbe prvega reda s konstantnimi koeficienti, je rešitev teh enačb preprosta.

$$\begin{aligned}
 u^a(x) &= u^a(0) + \int_0^x \varepsilon_x^a d\xi, \\
 v^a(x) &= v^a(0) + \int_0^x (\gamma_y^a + \varphi_z^a) d\xi, \\
 w^a(x) &= w^a(0) + \int_0^x (\gamma_z^a - \varphi_y^a) d\xi, \\
 \varphi_x^a(x) &= \varphi_x^a(0) + \int_0^x \kappa_x^a d\xi, \\
 \varphi_y^a(x) &= \varphi_y^a(0) + \int_0^x \kappa_y^a d\xi, \\
 \varphi_z^a(x) &= \varphi_z^a(0) + \int_0^x \kappa_z^a d\xi, \\
 u^b(x) &= u^b(0) + \int_0^x \varepsilon_x^b d\xi, \\
 v^b(x) &= v^b(0) + \int_0^x (\gamma_y^b + \varphi_z^b) d\xi.
 \end{aligned} \quad (63)$$

Tudi ravnotežne enačbe DSP-nosilca so navadne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Ker sta komponenti kontaktne linijske obtežbe $p_{x,k}^a$ in $p_{y,k}^a$ odvisni od Δx in Δy , s tem pa tudi od pomikov in zasukov, ki so odvisni od deformacij, lahko tudi ravnotežne enačbe rešimo neodvisno od kinematičnih enačb. Rešitve teh enačb so:

$$\begin{aligned}
 N_x^a(x) &= N_x^a(0) - \int_0^x (p_{x,z}^a + p_{x,k}^a) d\xi, \\
 N_y^a(x) &= N_y^a(0) - \int_0^x (p_{y,z}^a + p_{y,k}^a) d\xi, \\
 N_z(x) &= N_z(0) - \int_0^x (p_{z,z}^a + p_{z,k}^a) d\xi, \\
 M_x(x) &= M_x(0) - \int_0^x (m_{x,z}^a + m_{x,z}^b + h_t p_{y,k}^a) d\xi, \\
 M_y(x) &= M_y(0) + \int_0^x (N_z - m_{y,z}^a - m_{y,z}^b + h_t p_{x,k}^a) d\xi, \\
 M_z(x) &= M_z(0) - \int_0^x (N_y^a + N_y^b + m_{z,z}^a + m_{z,z}^b) d\xi, \\
 N_x^b(x) &= N_x^b(0) - \int_0^x (p_{x,z}^b - p_{x,k}^a) d\xi, \\
 N_y^b(x) &= N_y^b(0) - \int_0^x (p_{y,z}^b - p_{y,k}^a) d\xi.
 \end{aligned} \quad (64)$$

Rešitve kinematičnih in ravnotežnih enačb DSP-nosilca poznamo, ko določimo šestnajst integracijskih konstant: $u^a(0), v^a(0), w^a(0), \varphi_x^a(0), \varphi_y^a(0), \varphi_z^a(0), u^b(0), v^b(0), N_x^a(0), N_y^a(0), N_z(0), M_x(0),$

$M_y(0)$, $M_z(0)$, $N_x^b(0)$ in $N_y^b(0)$. Te določimo skladno s predpisanimi robnimi pogoji pri $x=0$ in $x=L$, kjer smo z L označili dolžino DSP-nosilca. Robni pogoji pri $x=0$ so:

$$\begin{aligned} u^a(0) &= u_0^a & N_x^a(0) - F_{x,0}^a &= 0, \\ v^a(0) &= v_0^a & N_y^a(0) - F_{y,0}^a &= 0, \\ w^a(0) &= w_0^a & N_z(0) - F_{z,0} &= 0, \\ \varphi_x^a(0) &= \varphi_{x,0}^a & M_x(0) - M_{x,0} &= 0, \\ \varphi_y^a(0) &= \varphi_{y,0}^a & M_y(0) - M_{y,0} &= 0, \\ \varphi_z^a(0) &= \varphi_{z,0}^a & M_z(0) - M_{z,0} &= 0, \\ u^b(0) &= u_0^b & N_x^b(0) - F_{x,0}^b &= 0, \\ v^b(0) &= v_0^b & N_y^b(0) - F_{y,0}^b &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Da lahko zadostimo tudi robnim pogojem pri $x=L$, najprej s pomočjo enačb (63) in (64) določimo pomike, zasuke, sile in momente pri $x=L$. Robni pogoji pri $x=L$ so torej:

$$\begin{aligned} u^a(L) &= u^a(0) + \int_0^L \varepsilon_x^a d\xi = u_L^a, \\ v^a(L) &= v^a(0) + \int_0^L (\gamma_y^a + \varphi_z^a) d\xi = v_L^a, \\ w^a(L) &= w^a(0) + \int_0^L (\gamma_z^a - \varphi_y^a) d\xi = w_L^a, \\ \varphi_x^a(L) &= \varphi_x^a(0) + \int_0^L \kappa_x^a d\xi = \varphi_{x,L}^a, \\ \varphi_y^a(L) &= \varphi_y^a(0) + \int_0^L \kappa_y^a d\xi = \varphi_{y,L}^a, \\ \varphi_z^a(L) &= \varphi_z^a(0) + \int_0^L \kappa_z^a d\xi = \varphi_{z,L}^a, \\ u^b(L) &= u^b(0) + \int_0^L \varepsilon_x^b d\xi = u_L^b, \\ v^b(L) &= v^b(0) + \int_0^L (\gamma_y^b + \varphi_z^a) d\xi = v_L^b. \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} N_x^a(L) &= N_x^a(0) - \int_0^L (p_{x,z}^a + p_{x,k}^a) d\xi = F_{x,L}^a, \\ N_y^a(L) &= N_y^a(0) - \int_0^L (p_{y,z}^a + p_{y,k}^a) d\xi = F_{y,L}^a, \\ N_z(L) &= N_z(0) - \int_0^L (p_{z,z}^a + p_{z,z}^b) d\xi = F_{z,L}, \\ M_x(L) &= M_x(0) - \int_0^L (m_{x,z}^a + m_{x,z}^b + h_t p_{y,k}^a) d\xi = M_{x,L}, \\ M_y(L) &= M_y(0) + \int_0^L (N_z - m_{y,z}^a - m_{y,z}^b + h_t p_{x,k}^a) d\xi = M_{y,L}, \\ M_z(L) &= M_z(0) - \int_0^L (N_y^a + N_y^b + m_{z,z}^a + m_{z,z}^b) d\xi = M_{z,L}, \\ N_x^b(L) &= N_x^b(0) - \int_0^L (p_{x,z}^b - p_{x,k}^a) d\xi = F_{x,L}^b, \\ N_y^b(L) &= N_y^b(0) - \int_0^L (p_{y,z}^b - p_{y,k}^a) d\xi = F_{y,L}^b. \end{aligned} \quad (67)$$

Še enkrat poudarimo, da tudi za robne pogoje (66) in (67) pri $x=L$ velja, da tam, kjer smo predpisali kinematične robne pogoje, ne moremo predpisati statičnih.

Deformacijske količine DSP-nosilca izrazimo v odvisnosti od notranjih statičnih količin s pomočjo konstitucijskih enačb. Skladno z deformacijsko metodo končnih elementov moramo konstitucijske enačbe izraziti v obliki funkcionala oziroma v obliki modificiranega izreka o virtualnem delu [Čas, 2004]. Izpeljava modificiranega izreka o virtualnem delu je preprosta. Opazujemo izrek o virtualnem delu DSP-nosilca in pripadajoče kinematične enačbe. Slednje predstavljajo vezne enačbe k funkcionalu. Pri izpeljavi modificiranega izreka o virtualnem delu vezne enačbe v funkcionalu upoštevamo skladno z metodo Lagrangeovih množiteljev pri vezanih nalogah variacijskega računa. Skladno s tem postopkom kinematične enačbe, ki smo jih pomnožili s poljubnimi funkcijami, variramo in v variacijski obliki prištejemo k izreku o virtualnem delu. Po kratkem računu lahko izrek o virtualnem delu zapišemo v prepoznavni obliki:

$$\begin{aligned} \delta W^* &= \int_0^L [(N_{x,c}^a - N_x^a) \delta \varepsilon_x^a + (N_{y,c}^a - N_y^a) \delta \gamma_y^a + (N_{z,c} - N_z) \delta \gamma_z^a + \\ &\quad (M_{x,c} - M_x) \delta \kappa_x^a + (M_{y,c} - M_y) \delta \kappa_y^a + (M_{z,c} - M_z) \delta \kappa_z^a + \\ &\quad (N_{x,c}^b - N_x^b) \delta \varepsilon_x^b + (N_{y,c}^b - N_y^b) \delta \gamma_y^b] d\xi = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

V funkcionalu (68) upoštevamo, da so variacije poljubne količine in da smo kinematičnim ter ravnotežnim enačbam DSP-nosilca točno zadostili. Pri tem pa kinematični in statični robni pogoji (65) do (67) predstavljajo vezne enačbe k funkcionalu (68), ki ga imenujemo modificiran izrek o virtualnem delu za DSP-nosilce s podajno povezavo med slojema.

3.2 Diskretne posplošene ravnotežne enačbe

Modificiran izrek o virtualnem delu (68) s statičnimi in kinematičnimi robnimi pogoji (65) do (67) uporabimo kot izhodišče za izpeljavo deformacijske metode končnih elementov DSP-nosilcev. Skladno z metodo končnih elementov DSP-nosilec razdelimo na n_e končnih elementov z dolžino končnega elementa L_e ($e=1,2,\dots,n_e$). Z n_v označimo število vozlišč, z n_p pa število kinematičnih robnih pogojev. Kot vemo, s kinematičnimi robnimi pogoji zagotovimo mirovanje obravnavanega DSP-nosilca. Ob tem velja poudariti, da zaradi podajne povezave med slojema obravnavanega nosilca ni nujno, da s kinematičnimi robnimi pogoji zagotovimo mirovanje vsakega sloja posebej.

Za interpolacijske nastavke deformacijskih količin obravnavanega nosilca izberemo Lagrangeove interpolacijske polinome stopnje $n-1$, ki jih označimo s $P_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$). Tako deformacijske količine zapišemo z izrazi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \varepsilon_{x,i}^a, & \gamma_y^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \gamma_{y,i}^a, \\ \gamma_z^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \gamma_{z,i}^a, & \kappa_x^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \kappa_{x,i}^a, \\ \kappa_y^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \kappa_{y,i}^a, & \kappa_z^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \kappa_{z,i}^a, \\ \varepsilon_x^b(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \varepsilon_{x,i}^b, & \gamma_y^b(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \gamma_{y,i}^b. \end{aligned} \quad (69)$$

Podobno interpolacijske nastavke izberemo tudi za variacije deformacijskih količin:

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_x^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \varepsilon_{x,i}^a, & \delta \gamma_y^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \gamma_{y,i}^a, \\ \delta \gamma_z^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \gamma_{z,i}^a, & \delta \kappa_x^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \kappa_{x,i}^a, \\ \delta \kappa_y^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \kappa_{y,i}^a, & \delta \kappa_z^a(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \kappa_{z,i}^a, \\ \delta \varepsilon_x^b(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \varepsilon_{x,i}^b, & \delta \gamma_y^b(x) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \gamma_{y,i}^b.\end{aligned}\quad (70)$$

Ko variacije (70) vstavimo v modificiran izrek o virtualnem delu (68) in ko upoštevamo, da so variacije deformacijskih količin v interpolacijskih točkah poljubne, dobimo po znanih postopkih variacijskega računa za določitev deformacijskih količin v interpolacijskih točkah končnega elementa naslednji sistem enačb ($i=1,2,\dots,n$):

$$\begin{aligned}g_i &= \int_0^{L_e} (N_{x,c}^a - N_x^a) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+n} &= \int_0^{L_e} (N_{y,c}^a - N_y^a) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+2n} &= \int_0^{L_e} (N_{z,c} - N_z) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+3n} &= \int_0^{L_e} (M_{x,c} - M_x) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+4n} &= \int_0^{L_e} (M_{y,c} - M_y) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+5n} &= \int_0^{L_e} (M_{z,c} - M_z) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+6n} &= \int_0^{L_e} (N_{x,c}^b - N_x^b) P_i d\xi = 0, \\ g_{i+7n} &= \int_0^{L_e} (N_{y,c}^b - N_y^b) P_i d\xi = 0.\end{aligned}\quad (71)$$

Sistem enačb (71) predstavlja 8 n enačb za določitev prav toliko neznanih deformacijskih količin v interpolacijskih točkah vsakega končnega elementa ($i=1,2,\dots,n$): $\varepsilon_{x,i}^a, \gamma_{y,i}^a, \gamma_{z,i}^a, \kappa_{x,i}^a, \kappa_{y,i}^a, \kappa_{z,i}^a, \varepsilon_{x,i}^b, \gamma_{y,i}^b$. Enačbe (65) do (67), ki predstavljajo kinematične in statične robne pogoje, prilagodimo mreži končnih elementov. Za vsak končni element enačbe (66) zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned}g_{8n+1} &= u^a(L_e) - u^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \varepsilon_{x,i}^a d\xi = 0, \\ g_{8n+2} &= v^a(L_e) - v^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \gamma_{y,i}^a d\xi - \varphi_z^a(0) L_e - \\ &\quad \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} \int_0^x P_i \kappa_{z,i}^a d\xi d\xi = 0, \\ g_{8n+3} &= w^a(L_e) - w^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \gamma_{z,i}^a d\xi + \varphi_y^a(0) L_e + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} \int_0^x P_i \kappa_{y,i}^a d\xi d\xi = 0, \\ g_{8n+4} &= \varphi_x^a(L_e) - \varphi_x^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \kappa_{x,i}^a d\xi = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{8n+5} &= \varphi_y^a(L_e) - \varphi_y^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \kappa_{y,i}^a d\xi = 0, \\ g_{8n+6} &= \varphi_z^a(L_e) - \varphi_z^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \kappa_{z,i}^a d\xi = 0, \\ g_{8n+7} &= u^b(L_e) - u^b(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \varepsilon_{x,i}^b d\xi = 0, \\ g_{8n+8} &= v^b(L_e) - v^b(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} P_i \gamma_{y,i}^b d\xi - \varphi_z^b(0) L_e - \\ &\quad \sum_{i=1}^n \int_0^{L_e} \int_0^x P_i \kappa_{z,i}^b d\xi d\xi = 0.\end{aligned}\quad (72)$$

S pomočjo enačb (72) v vsakem končnem elementu zadosimo predpisanim kinematičnim robnim pogojem oziroma povežemo končne elemente v konstrukcijo. Pri tem seveda kinematične količine na začetku in koncu končnega elementa nadomestimo z ustreznimi kinematičnimi količinami vozlišč, ki omejujejo končni element, če pa so v vozliščih predpisani kinematični robni pogoji, pa s predpisanimi kinematičnimi vrednostmi. Teh enačb je 8 za vsak končni element, oziroma $8n_e$ za celoten obravnavan DSP-nosilec, neznanih kinematičnih količin pa $8n_v - n_r$.

Ker statični robni pogoji omogočajo ravnotežje na robovih končnega elementa, to v primeru mreže končnih elementov pomeni zagotavljanje ravnotežja v vseh vozliščih mreže končnih elementov. Na robovih nosilca pa seveda ravnotežje med notranjimi statičnimi količinami in predpisanimi zunanji statičnimi količinami. Za ponazoritev opazujemo vozlišče mreže končnih elementov, v katerem se stikata končna elementa z oznakama $e-1$ in e . Ravnotežje vozlišča določajo enačbe:

$$\begin{aligned}-N_x^a(L_{e-1}) + N_x^a(L_e) + S_1 &= 0, \\ -N_y^a(L_{e-1}) + N_y^a(L_e) + S_2 &= 0, \\ -N_z(L_{e-1}) + N_z(L_e) + S_3 &= 0, \\ -M_x(L_{e-1}) + M_x(L_e) + S_4 &= 0, \\ -M_y(L_{e-1}) + M_y(L_e) + S_5 &= 0, \\ -M_z(L_{e-1}) + M_z(L_e) + S_6 &= 0, \\ -N_x^b(L_{e-1}) + N_x^b(L_e) + S_7 &= 0, \\ -N_y^b(L_{e-1}) + N_y^b(L_e) + S_8 &= 0,\end{aligned}\quad (73)$$

kjer smo s S_i ($i=1,2,\dots,8$) označili posplošene zunanje točkovne sile v vozlišču v . Če je vozlišče v zunanji rob DSP-nosilca, te sile predstavljajo sile v statičnih robnih pogojih. Teh enačb je $8n_v - n_r$, neznanih fizikalnih količin pa $8n_e$. Neznane količine so začetne vrednosti notranjih statičnih količin končnega elementa. Sistem enačb (71) do (73) imenujemo diskretni posplošeni sistem ravnotežnih enačb DSP-nosilca. Sestavlja jih $(8n)n_e + 8n_e + 8n_v - n_r$ algebrskih enačb za prav toliko neznanih količin. Te so deformacijske količine v vseh interpolacijskih točkah končnih elementov, posplošeni pomiki in zasuki v vozliščih mreže končnih elementov in začetne vrednosti posplošenih notranjih statičnih količin vsakega končnega elementa.

3.3 Newton-Raphsonova metoda

Diskretni posplošeni sistem ravnotežnih enačb DSP-nosilca s podajnim stikom formalno zapišemo v obliki

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad (74)$$

kjer smo v vektorju $\mathbf{x}$ združili vse neznane količine sistema, λ pa smo označili obtežni parameter. Sistem nelinearnih enačb (74) rešimo z Newton-Raphsonovo iteracijsko shemo. Za dani obtežni faktor oziroma za dano obtežbo DSP-nosilca enačbe (74) lineariziramo in linearni sistem rešujemo iterativno za $(i=0,1,2,\dots)$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \lambda) \Delta \mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \lambda) \quad (75)$$

do izbrane natančnosti, torej do takrat, dokler ni zadoščeno enemu izmed pogojev:

$$\|\Delta \mathbf{x}_{i+1}\| < 10^{-9} \text{ ali} \quad (76)$$

$$\|\mathbf{G}_{i+1}\| < 10^{-4}. \quad (77)$$

V enačbi (75) smo s $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \lambda)$ označili tangentno matriko. Določimo jo z uporabo smernega odvoda

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \lambda) \Delta \mathbf{x}_{i+1} = \frac{d}{dh} [\mathbf{G}(\mathbf{x}_i + h \Delta \mathbf{x}_{i+1}, \lambda)] \Big|_{h=0}. \quad (78)$$

Newton-Raphsonova metoda odpove, če postane tangentna matrika $\mathbf{K}$ singularna. To se lahko zgodi v primerih globalne geometrijske nestabilnosti konstrukcije ali materialne nestabilnosti posameznega prereza. V takih primerih moramo sistem enačb (74) reševati z drugimi metodami.

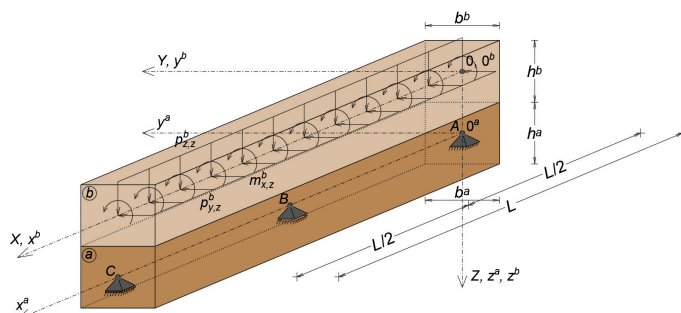
4 RAČUNSKA PRIMERA

Z dvema računskima primeroma analiziramo primernost prikazane numerične metode za analizo DSP-nosilcev s podajnim stikom med slojema. V prvem računskem primeru analiziramo dvoslojni leseni kontinuirni prostorski nosilec. Vsebinsko ta primer razdelimo na štiri dele. V prvem delu s krajšo konvergenčno študijo ocenimo natančnost prikazanega numeričnega modela, nato v drugem delu podrobno prikažemo vpliv značilne prostorske zunanje obtežbe na potek fizikalnih količin v oseh slojev obravnavanega dvoslojnega kontinuiranega nosilca. V tretjem in četrtem delu pa z natančno parametrično študijo ocenimo vpliv strižnih deformacij in vpliv števila jeklenih vijakov na stiku med slojema na poteke značilnih fizikalnih količin obravnavanih nosilcev. V drugem računskem primeru analiziramo sovprežni prostoležeči prostorski nosilec iz jekla in betona. V tem primeru bomo podrobno analizirali vpliv nelinearnega modela povezave med slojema obravnavanih nosilcev na poteke povesov.

4.1 Kontinuirni nosilec

Osnovni podatki. Opazujemo kontinuirni DSP-nosilec z dvema poljema dolžine $L/2$. Dimenzije prečnega prereza sloja a obravnavanega nosilca so $b^a/h^a=20/20$ cm, sloja b pa $b^b/h^b=20/20$ cm (slika 2).

Predpostavimo, da podpore preprečujejo le posamezne pomike oziroma zasuke v težiščni osi sloja a . Pripadajoče robne pogoje obravnavanega nosilca prikazujemo v preglednici 1. V analizi predpostavimo tudi, da zunanja obtežba deluje le na težiščno os sloja b obravnavanega nosilca in da jo predstavljajo komponenti enakomerne linijske obtežbe $p_{y,z}^b$ in $p_{y,z}^b$, ter komponenta linijske momentne obtežbe $m_{x,z}^b = p_{y,z}^b \frac{h^b}{2}$ kot je prika-



Slika 2. Računski model obravnavanega dvoslojnega kontinuirnega nosilca.

A	$u_a=0,$	$N_x^b=0,$
	$v_a=0,$	$N_y^b=0,$
	$w=0,$	$\varphi_x=0,$
	$M_y=0,$	$M_z=0.$
B $w=0.$		
C	$N_x^a=0,$	$N_x^b=0,$
	$v_a=0,$	$N_y^b=0,$
	$w=0,$	$\varphi_x=0,$
	$M_y=0,$	$M_z=0.$

Preglednica 1. Kontinuirni nosilec. Kinematični in statični robni pogoji.

zано na sliki 2. Pri tem je $m_{x,z}^b$ posledica prestavitve delovanja zunanje obtežbe $p_{y,z}^b$ v težiščno os sloja b . Oba sloja obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca sta iz smrekovega lesa, za sloj a smo izbrali razred C30, za sloj b pa C24. Pripadajoče materialne parametre linearnega konstitucijskega modela za posamezni sloj prikazujemo v preglednici 2.

	material	E' [kN/cm ²]	G' [kN/cm ²]	ρ_m^i [kg/m ³]
sloj a	les C30	1200	75	460
sloj b	les C24	1100	69	420

Preglednica 2. Materialni parametri konstitucijskega modela slojev a in b .

Povezano delovanje slojev obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca zagotovimo z jeklenimi vijaki premera $d=24$ mm. Te razporedimo na enakomerni razdalji e vzdolž stične ravnine med slojema. Ker smo predpostavili, da je nivo zunanje obtežbe obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca relativno majhen, predpostavimo tudi linearno obnašanje veznih sredstev. Materialne parametre linearnega konstitucijskega modela stika določimo skladno s standardom SIST EN 1995-1-1 [SIST, 2005], kjer K_x in K_y ki predstavljata modula pomikov veznega sredstva za eno priključno ravnino, izračunamo z enačbo

$$K_x = K_y = \rho_m^{1,5} \frac{d}{23} \frac{1}{e},$$

$$\rho_m = \sqrt{\rho_m^a \rho_m^b} = \sqrt{460 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 420 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 439,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (79)$$

Brez izgube na splošnosti smo v enačbi (79) predpostavili, da sta materialna parametra modela v vzdolžni in prečni smeri enaka.

V preglednici 3 prikazujemo še geometrijske karakteristike prečnih prerezov obeh slojev obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca.

	A_x^i [cm ²]	A_y^i [cm ²]	A_z^i [cm ²]	I_y^i [cm ⁴]	I_z^i [cm ⁴]	I_t^i [cm ⁴]
sloj a	400	333,33	333,33	13333,33	13333,33	22560
sloj b	400	333,33	333,33	13333,33	13333,33	22560

Preglednica 3. Geometrijske karakteristike prečnih prerezov sloja a in sloja b.

Skladno z navodili Cowperja [Cowper, 1966] smo t. i. strižna prečna prereza slojev korigirali s faktorjem 5/6. Podobno smo po navodilih Hjelmstada [Hjelmstad, 2005] polarna vztrajnostna momenta nadomestili s torzijskima vztrajnostnima momentoma i-tega sloja ($i=a,b$) skladno z enačbo [Hearn, 1997]

$$I_t^i = 0,141 b^i h^{i^3}. \quad (80)$$

Konvergenčna študija. Konvergenčne lastnosti deformacijskih končnih elementov za analizo homogenih in dvoslojnih ravninskih nosilcev s podajnim stikom med slojema so v znanstveni literaturi dobro dokumentirane ([Čas, 2004], [Hozjan, 2009]). S konvergenčnimi študijami so raziskovalci ugotovili, da je za analizo homogenih in dvoslojnih ravninskih nosilcev optimalen deformacijski končni element, pri katerem deformacijske količine interpoliramo z Lagrangeovimi interpolacijskimi polinomi četrte stopnje, kot integracijsko shemo vzdolž osi končnega elementa pa izberemo pettočkovno Gaussovo integracijsko shemo. Tak deformacijski končni element skladno z prej omenjeno literaturo označimo z oznako E_{4-5} . Konvergenčne študije pri DSP-nosilcih s podajnim stikom med slojema so pokazale, da so konvergenčne lastnosti teh končnih elementov v celoti enake konvergenčnim lastnostim deformacijskih končnih elementov za analizo dvoslojnih ravninskih nosilcev. Tako z le nekaj deformacijskimi končnimi elementi tipa E_{4-5} izredno natančno izračunamo vse fizikalne količine obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca. V potrditev tega v preglednici 4 prikazujemo značilne fizikalne količine obravna-

vanega kontinuirnega DSP-nosilca v odvisnosti od števila deformacijskih končnih elementov tipa E_{4-5} . Pri tem smo v analizi izbrali: $L=8$ m, $e=30$ cm, $p_{z,z}^b=10$ kN/m, $p_{y,z}^b=1$ kN/m, $m_{x,z}^b=0,1$ kN/m.

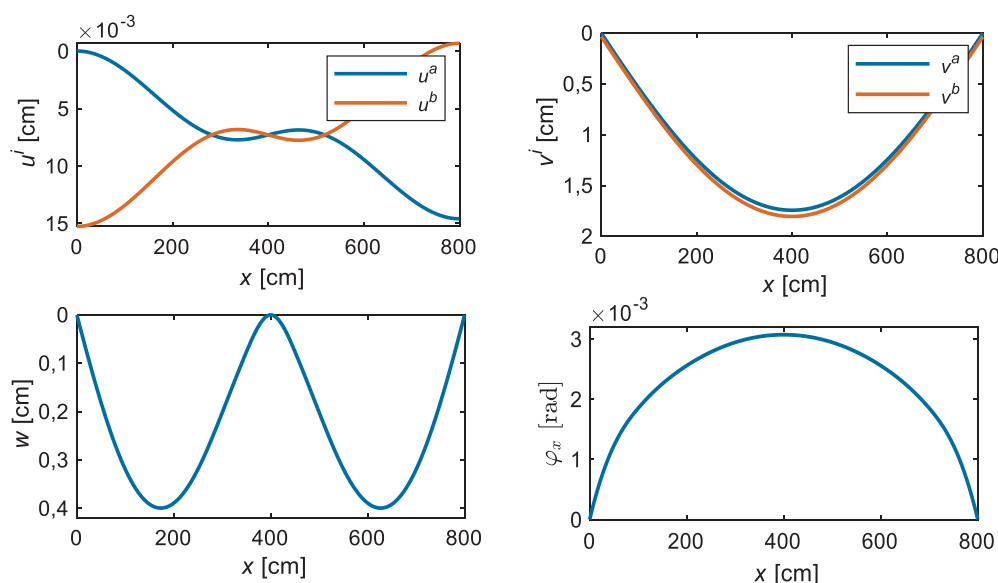
Število KE E_{4-5}	$w(\frac{L}{4})$ [cm]	$N_x(\frac{L}{4})$ [kN]	$M_y(\frac{L}{4})$ [kNm]
4	0,389	16,325	7,839
8	0,389	16,325	7,839
16	0,389	16,325	7,839

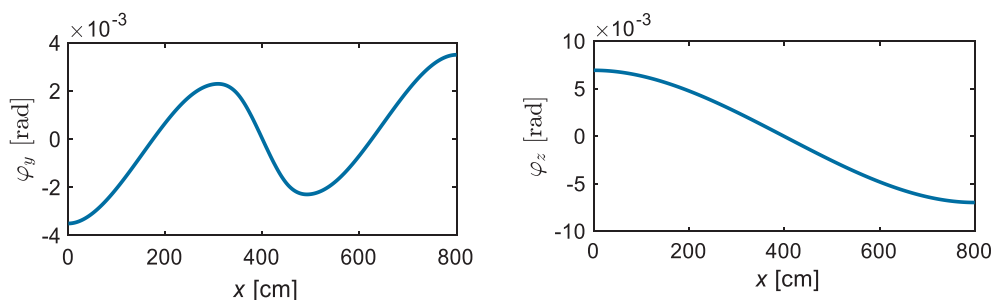
Preglednica 4. Velikost značilnih fizikalnih količin nosilca v odvisnosti od števila KE E_{4-5} .

Kot lahko vidimo v preglednici 4, lahko že s 4 deformacijskimi KE E_{4-5} izračunamo značilne fizikalne količine na desetinko promila natančno. V nadaljnjih analizah kontinuirnega DSP-nosilca kljub temu uporabimo 16 deformacijskih KE E_{4-5} , saj lahko na ta način bolj gladko grafično predstavimo rezultate analiz, računski čas pa se pri tem bistveno ne poveča.

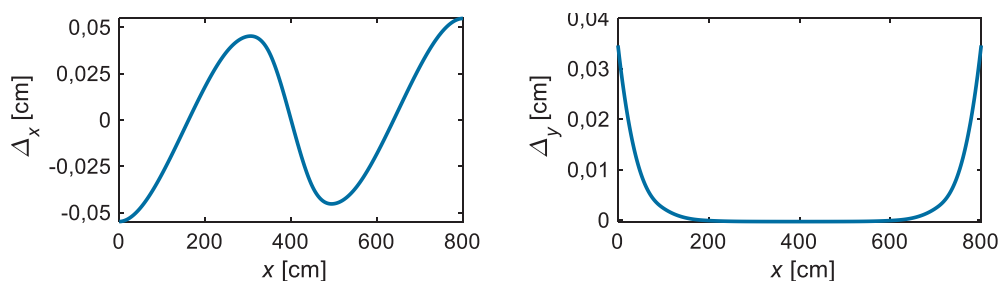
Prostorski odziv nosilca. V znanstveni literaturi je večina raziskav o numeričnih modelih za analizo dvoslojnih nosilcev s podajnim stikom omejena na ravninske primere. Zato v tem delu računskega primera predstavimo tudi potek fizikalnih količin pri prostorskem odzivu dvoslojnih nosilcev s podajnim stikom. Poleg osnovnih računskih podatkov, ki smo jih predstavili na začetku tega računskega primera, v analizi dodatno upoštevamo še obtežbo, dolžino kontinuirnega nosilca in razmak med jeklenimi vijaki na stiku med slojema v enakih vrednostih kot pri konvergenčni študiji.

Na sliki 3 vidimo, da so poteki komponent vzdolžnih pomikov sloja a in sloja b kot tudi komponent prečnega pomika in zasuka okoli osi pričakovani in podobni kot pri ravninski analizi. Zaradi prostorskega odziva obravnavanega dvoslojnega kontinuirnega nosilca na sliki 3 prikazujemo tudi poteke komponent pomikov v_a in v_b ter poteke komponent zasukov φ_x in φ_z .





Slika 3. Potek komponent pomikov in zasukov v oseh slojev ($u^a, u^b, v^a, v^b, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$).



Slika 4. Potek zamikov med slojema v vzdolžni in prečni smeri Δ_x in Δ_y .

Potek zamikov med slojema v vzdolžni in prečni smeri, Δ_x in Δ_y , prikazujemo na sliki 4, kjer opazimo značilen potek vzdolžnih zamikov Δ_x za kontinuirne nosilce. Tudi potek prečnih zamikov Δ_y je značilen za izbrane kinematične robne pogoje. Ker sta komponenti pomikov v^a pri $x=0$ in $x=L$ enaki nič, pomiki v^b pa tu niso preprečeni, so največji zamiki Δ_y opazni ravno ob krajnih podporah obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca.

Na sliki 5 prikazujemo potek notranjih statičnih količin v osi slojev obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca. Potek osnih sil N_x^a, N_x^b ter prečne sile N_y in upogibnega momenta M_y je pričakovano in skladen s »kontinuirnim« obnašanjem obravnavanega nosilca. Pričakovana sta tudi poteka torzijskega momenta M_x in upogibnega momenta M_z , saj je obravnavani nosilec v prečni smeri dejansko prostoležeč. Zanimiv pa je potek prečnih sil N_y^a in N_y^b . Na sliki 5 vidimo, kako se zunanja prečna linijska obtežba preko sloja b na robovih nosilca, kjer ta prečno ni podprt, preko veznih sredstev prenese v podprt sloj a obravnavanega nosilca.

Vpliv podajnosti stika. V tem delu računskega primera analiziramo vpliv podajnosti stika med slojema na potek fizikalnih količin obravnavanega kontinuirnega DSP-nosilca. Podajnost stika med slojema nosilca med posameznimi primeri spreminjamo s spreminjanjem razdalje med jeklenimi vijaki, s kate-

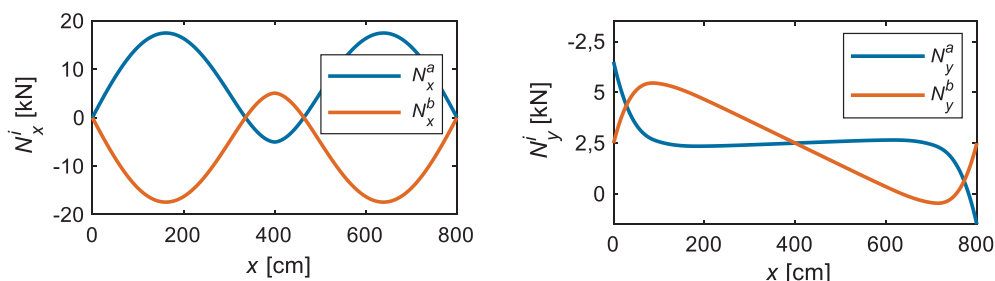
rimi sta sloja obravnavanega nosilca povezana. Obravnavamo tri primere, v katerih nosilce označimo z V1, V2 in V3. Razdalje med jeklenimi vijaki na stiku med slojema obravnavanih nosilcev in pripadajoče togosti veznih sredstev so podane v preglednici 5.

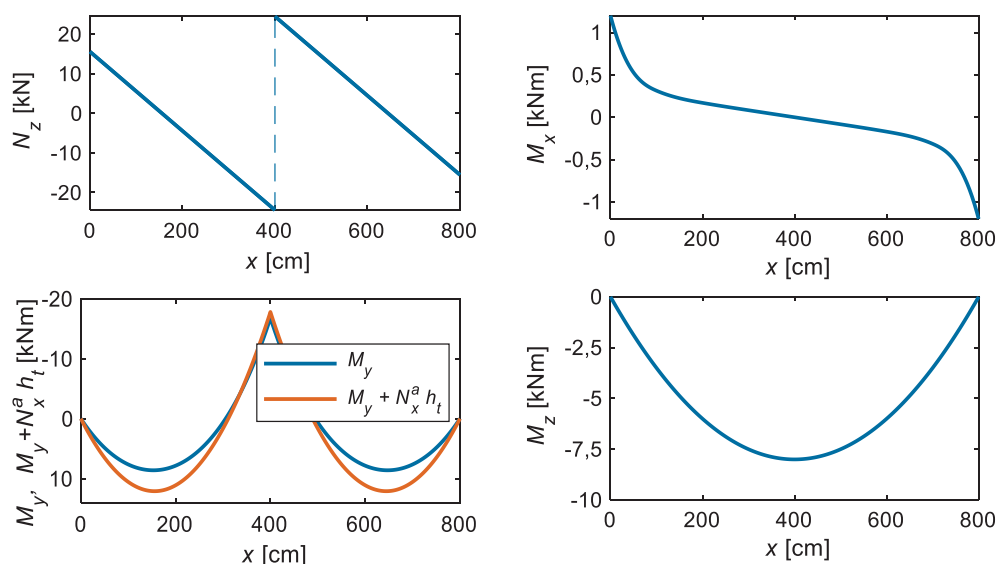
Na sliki 6 za vse tri analizirane kontinuirne DSP-nosilce prikazujemo poteke komponent vzdolžnih in prečnih pomikov v osi sloja a in v osi sloja b . Pričakovano se s povečanjem razdalje med jeklenimi vijaki na stiku med slojema povečujejo tudi velikosti komponent pomikov u^a, u^b, v^a in v^b .

Pričakovano so tudi poteki zamikov Δ_x in Δ_y največji pri najbolj podajnem stiku kontinuirnega DSP-nosilca (slika 7). Največji

Oznaka nosilca	e [cm]	$K_x = K_y \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right]$
V1	50	1,923
V2	30	3,205
V3	10	9,616

Preglednica 5. Oznake nosilcev s pripadajočimi razdaljami med jeklenimi vijaki na stiku med slojema in upoštevano togostjo veznih sredstev.





Slika 5. Potek notranjih statičnih količin v oseh slojev (N_x^a , N_x^b , N_y^a , N_y^b , N_z , M_x , M_y , M_z).

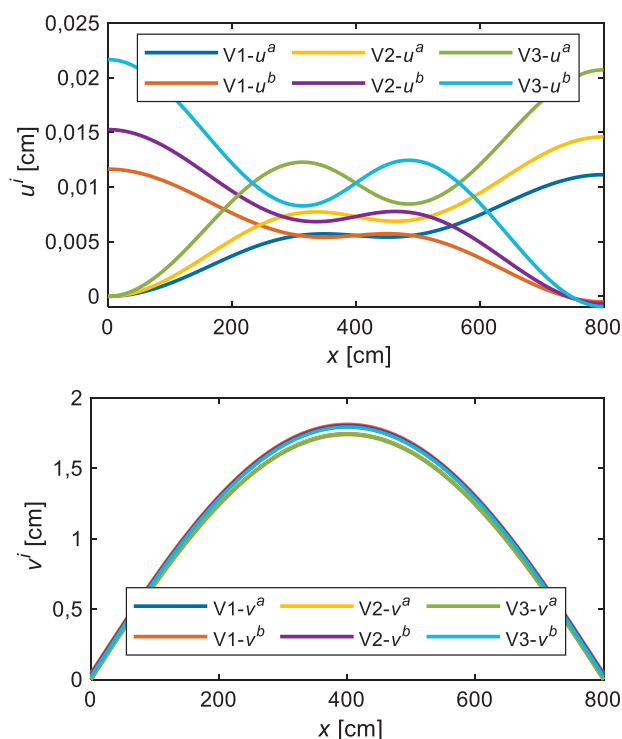
vzdolžni zamik Δ_x pri $x=L$, znaša 0,0646 cm za primer V1, 0,0548 cm za primer V2 in 0,0318 cm za primer V3.

Na sliki 8 prikazujemo potek povesov w ter potek zasukov φ_x , φ_y in φ_z obravnavanega nosilca v odvisnosti od podajnosti stika med slojema. Tudi tu opazimo, da so vrednosti količin w , φ_x in φ_y pri nosilcih z bolj podajnim stikom večje kot pri nosilcih z manj podajnim stikom. Izpostaviti velja opažanje, da podajnost stika med slojema nima nobenega vpliva na potek zas-

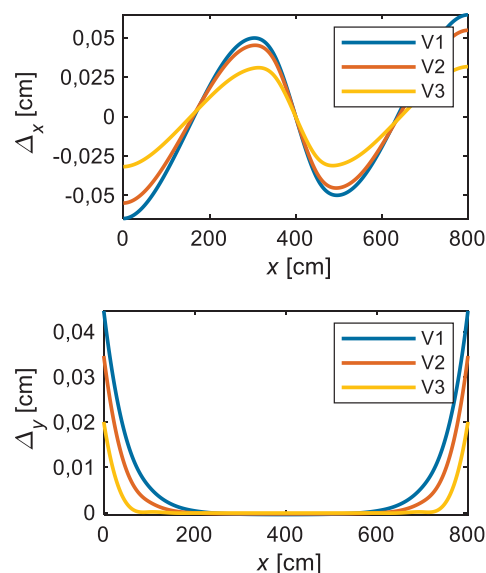
ka φ_z , kar je posledica tega, da v predstavljeni teoriji podajnost stika med slojema nima vpliva na upogibno togost nosilca okoli osi z .

Tudi potek osnih sil, N_x^a in N_x^b , ter prečnih sil v smeri y , N_y^a in N_y^b , vzdolž obravnavanih nosilcev je glede na izbrane razdalje med jeklenimi vijaki pričakovan (slika 9).

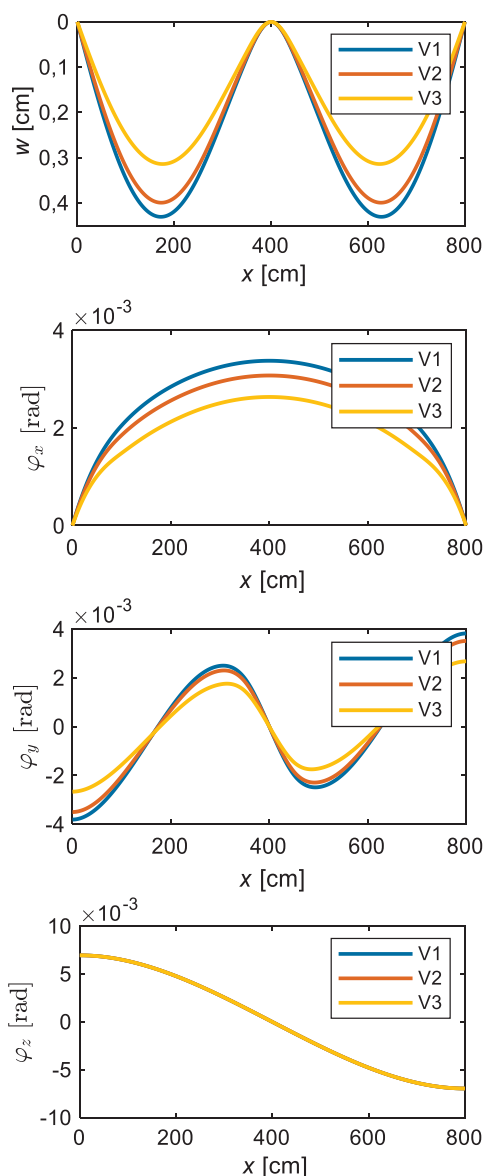
Na sliki 10 prikazujemo še potek preostalih notranjih statičnih količin obravnavanih nosilcev v odvisnosti od podajnosti stika med sloji. Dodatno na sliki 10 prikazujemo upogibni moment $M_y + N_x^a h_t$, ki predstavlja upogibni moment obravnavanih nosilcev v težiščni osi homogenih nosilcev. Torej gre za upogibni moment, ki bi ga izračunali pri enoslojnem homogenem nosilcu, izpostavljenem enaki obtežbi in enakim robnim pogojem.



Slika 6. Potek pomikov u^a , u^b , v^a in v^b v odvisnosti od razdalje med jeklenimi vijaki na stiku.

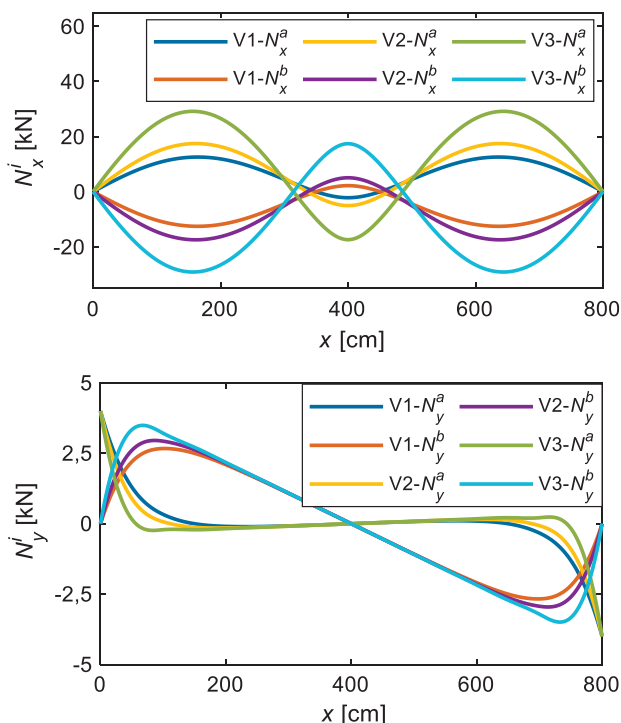
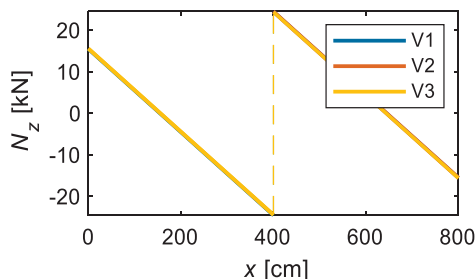


Slika 7. Potek zamikov Δ_x in Δ_y v odvisnosti od podajnosti stika med slojema.



Slika 8. Potek komponent w , φ_x , φ_y , in φ_z v odvisnosti od podajnosti stika med slojema.

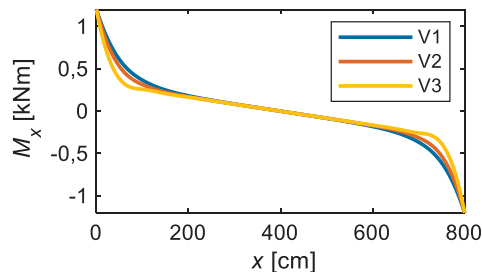
Na sliki 10 lahko opazimo, da se notranje statične količine spreminjajo glede na razmake med jeklenimi vijaki med slojema obravnavanih nosilcev. Praviloma se vrednosti notranjih statičnih količin s podajnostjo stika povečujejo, izjema je le po-

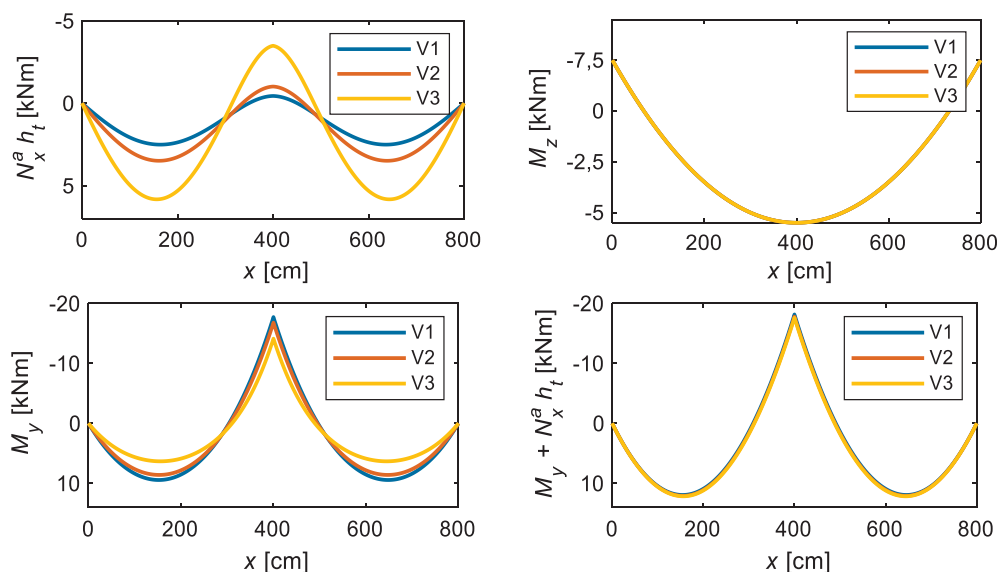


Slika 9. Potek komponent N_x^a , N_x^b , N_y^a in N_y^b v odvisnosti od podajnosti stika med slojema.

tek upogibnega momenta M_z , saj podajnost stika med slojema nanj nima vpliva.

Vpliv strižnih deformacij. V zadnjem delu prvega računskega primera analiziramo vpliv strižnih deformacij na potek značilnih fizikalnih količin obravnavanih kontinuirnih DSP-nosilcev. Podrobno bomo ta vpliv prikazali na velikosti povosov na četrtini razpona obravnavanih kontinuirnih DSP-nosilcev $w(L/4)$. V parametrični študiji bomo primerjali velikosti povosov $w(L/4)$ med šestnajstimi različnimi kontinuirnimi DSP-nosilci, ki se med seboj razlikujejo glede na: (i) dolžino L , (ii) razdaljo med jeklenimi vijaki na stiku med slojema e in (iii) upoštevanje strižne togosti. Za primer strižno podajnih slojev nosilca se upošteva $G^a=75$ [kN/cm²] in $G^b=69$ [kN/cm²], za primer strižno togih slojev pa se vrednosti G^a in G^b poenostavljeno poveča za faktor 1000, s čimer zanemarimo strižno podajnost slojev nosilca. Označke obravnavanih kontinuirnih DSP-nosilcev s pripadajočimi materialnimi in geometrijskimi parametri prikazujemo v preglednici 6.





Slika 10. Potek N_x , M_z , M_y , M_z , $N_x h_t$ in $M_y + N_x h_t$ v odvisnosti od podajnosti stika med sloji.

Rezultate parametrične študije prikazujemo v preglednici 7.

S pomočjo preglednice 7 ugotovimo, da imata dolžina nosilca L in strižna togost slojev nosilca opazen vpliv na velikost pomika $w(\frac{L}{4})$, medtem ko je vpliv rastra strižnih vijakov e manj izrazit. To potrjuje tudi slika 11, na kateri prikazujemo

potek povosov za vseh šestnajst obravnavanih kontinuirnih DSP-nosilcev.

Prikazani rezultati potrjujejo, da je vpliv strižne podajnosti slojev nosilca na komponento $w(\frac{L}{4})$ velik pri kratkih nosilcih oziroma pri nosilcih z nizkim razmerjem L/h . Bolj kot je toga povezava med slojema, večji je vpliv strižne podajnosti, a je ta vpliv vseeno manjši, kot je ta vpliv pri homogenih prostorskih nosilcih. Na sliki 12 prikazujemo razmerje med w_{M+V} in w_M v odvisnosti od dolžine nosilca L , pri različnem rastru strižnih vijakov e . Pri tem smo z w_{M+V} označili maksimalne povese na sredini polja nosilca z upoštevanjem strižne podajnosti slojev, z w_M pa maksimalne povese na sredini polja nosilca s strižno togimi sloji.

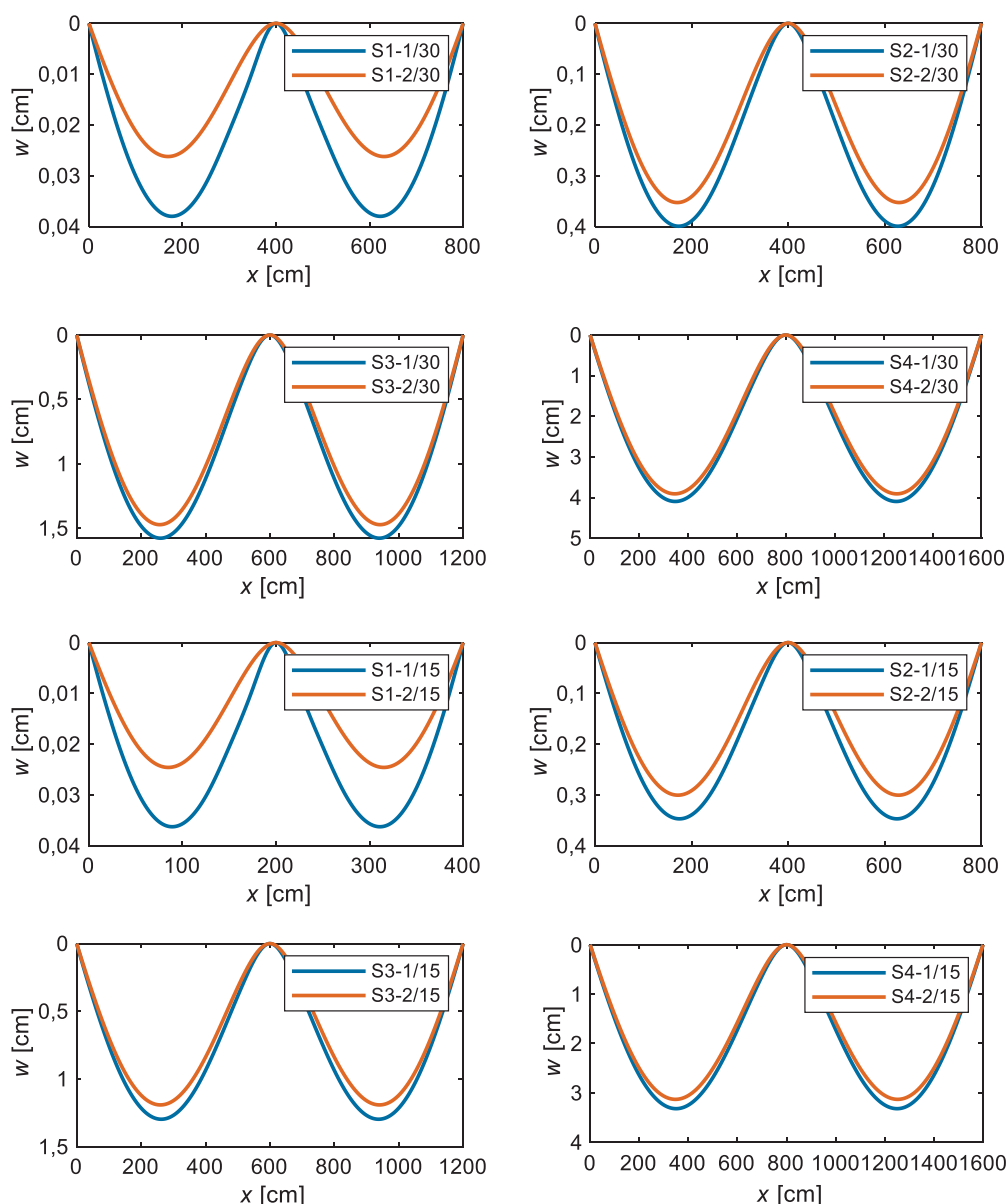
Primer	L [cm]	e [cm]	Strižno podajna sloja a in b
S1-1/30	400	30	DA
S1-2/30	400	30	NE
S2-1/30	800	30	DA
S2-2/30	800	30	NE
S3-1/30	1200	30	DA
S3-2/30	1200	30	NE
S4-1/30	1600	30	DA
S4-2/30	1600	30	NE
S1-1/15	400	15	DA
S1-2/15	400	15	NE
S2-1/15	800	15	DA
S2-2/15	800	15	NE
S3-1/15	1200	15	DA
S3-2/15	1200	15	NE
S4-1/15	1600	15	DA
S4-2/15	1600	15	NE

Preglednica 6. Oznake nosilcev s pripadajočimi parametri.

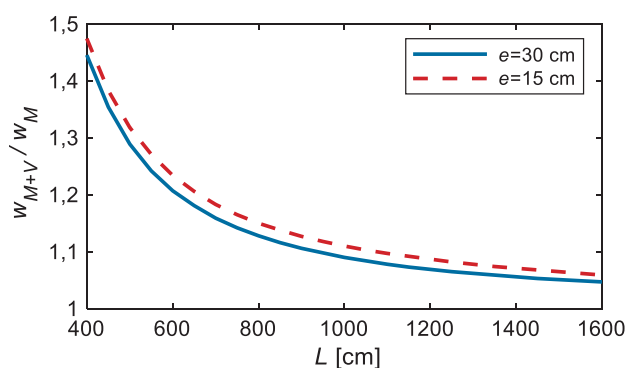
Primer	$w(\frac{L}{4})$ [cm]
S1-1/30	0,0370
S1-2/30	0,0258
S2-1/30	0,3913
S2-2/30	0,3470
S3-1/30	1,5444
S3-2/30	1,4446
S4-1/30	4,0083
S4-2/30	3,8301

Primer	$w(\frac{L}{4})$ [cm]
S1-1/15	0,0353
S1-2/15	0,0242
S2-1/15	0,3391
S2-2/15	0,2949
S3-1/15	1,2670
S3-2/15	1,1668
S4-1/15	3,2475
S4-2/15	3,0681

Preglednica 7. Povese $w(\frac{L}{4})$ obravnavanih nosilcev.



Slika 11. Potek povesov w v odvisnosti od L , G_d , G^b in e .



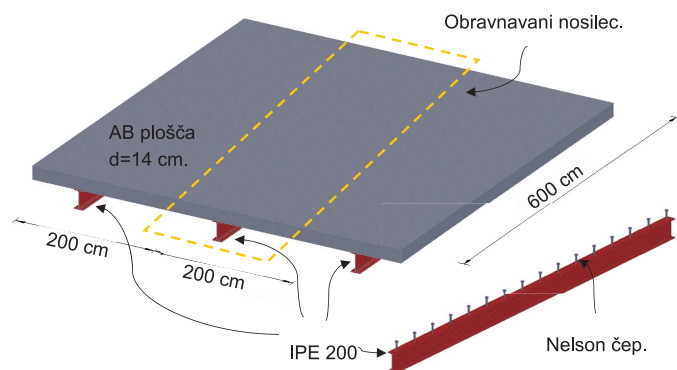
Slika 12. Vpliv strižne podajnosti slojev na pomik $w(\frac{L}{4})$ v odvisnosti od L in e .

4.2 Prostoležeči nosilec

Osnovni podatki. V tem računskem primeru analiziramo sovpredni prostoležeči prostorski nosilec dolžine $L=600$ cm. Nosilec sestavlja dva sloja. Za spodnji sloj a izberemo jeklen nosilec IPE 200, za zgornji sloj b pa armiranobetonsko ploščo debeline 14 cm. Jekleni nosilec in armiranobetonska plošča sta na stiku povezana s 16 enakomerno razporejenimi strižnimi čepi tipa Nelson M19, višine 100 mm. Značilno pozicijo sovprednega nosilca v konstrukcijskem sklopu objekta z geometrijskimi podatki prikazujemo na sliki 13.

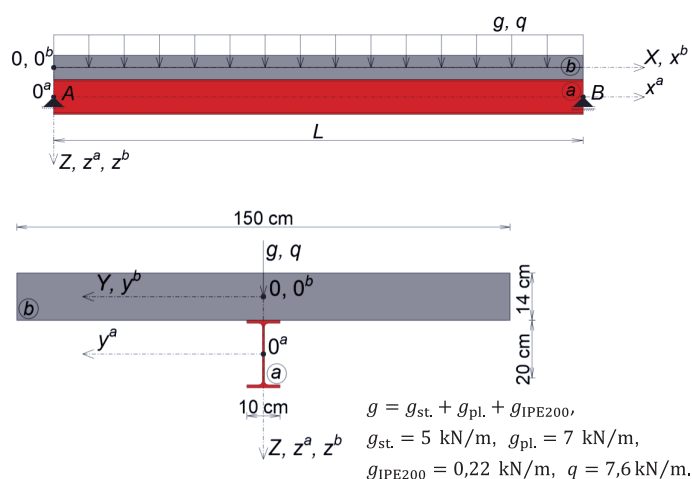
Efektivno širino armiranobetonske plošče določimo skladno s standardom Evrokod z enačbo

$$b_{\text{eff}} = b_0 + \sum b_{\text{ei}} = 2 \frac{L_e}{8} = 2 \frac{600 \text{ cm}}{8} = 150 \text{ cm} \leq 200 \text{ cm}. \quad (81)$$



Slika 13. Položaj sovprežnega nosilca v konstrukcijskem sklopu objekta in geometrijski podatki.

Tudi obtežbo obravnavanega dvoslojnega nosilca iz jekla in betona določimo skladno s standardom SIST EN 1990 [SIST, 2004]. Obtežbo, ki jo sestavljajo lastna teža ter stalna in koristna obtežba, v analizi upoštevamo kot enakomerno linijsko obtežbo v težiščni osi armiranobetonske plošče. Računski model z geometrijskimi podatki obravnavanega sovprežnega nosilca skupaj s podatki o obtežbi prikazujemo na sliki 14.



Slika 14. Geometrijski podatki ter podatki o obtežbi.

V nadaljnjih analizah tega računskega primera upoštevamo vpliv stalne in koristne obtežbe na obnašanje sovprežnega nosilca s karakteristično obtežno kombinacijo

$$q_{Ed} = g + q = 19,82 \frac{\text{kN}}{\text{m}}. \quad (82)$$

Robne pogoje obravnavanega sovprežnega prostorskega nosilca prikazujemo v preglednici 8.

A:	$u_a=0,$	$N_x^b=0,$
	$v_a=0,$	$N_y^b=0,$
	$w=0,$	$\varphi_x=0,$
	$M_y=0,$	$M_z=0.$
B:	$N_x^a=0,$	$N_x^b=0,$
	$v_a=0,$	$N_y^b=0,$
	$w=0,$	$\varphi_x=0,$
	$M_y=0,$	$M_z=0.$

Preglednica 8. Kinematični in statični robni pogoji.

Kot smo že omenili, je sloj *b* armiranobetonska plošča. Izbrani trdnostni razred betona je C25/30, armatura pa je kakovosti B-500B. Kot sloj *a* obravnavanega sovprežnega nosilca pa izberemo jekleni nosilec IPE 200 trdnostnega razreda S235. Skladno z izbranimi materiali obravnavanega sovprežnega nosilca smo v analizi upoštevali karakteristično tlačno trdnost betona $f_{ck}=25$ MPa in karakteristično natezno trdnost jekla $f_y=235$ MPa. Materialne parametre privzetega linearno elastičnega modela slojev *a* in *b* sovprežnega nosilca prikazujemo v preglednici 9.

	material	E' [kN/cm ²]	ν'	G' [kN/cm ²]
sloj <i>a</i>	jeklo S235	21000	$\approx 0,296$	8100
sloj <i>b</i>	beton C25/30	3100	$\approx 0,165$	1330

Preglednica 9. Materialni parametri linearno elastičnega modela slojev *a* in *b*.

Jekleni nosilec in armiranobetonska plošča sta na stiku povezana s strižnimi čepi tipa Nelson. Za ta tip povezave med slojema sovprežnega nosilca praviloma upoštevamo konstitucijski zakon stika skladno s priporočili Huang [Huang, 1999], ki predlaga nelinearno enačbo oblike

$$p_{x,k,c}^a = A p_{\max} (1 - e^{(-B \Delta)}), \quad p_{\max} = n \frac{P_{Rd}}{L}. \quad (83)$$

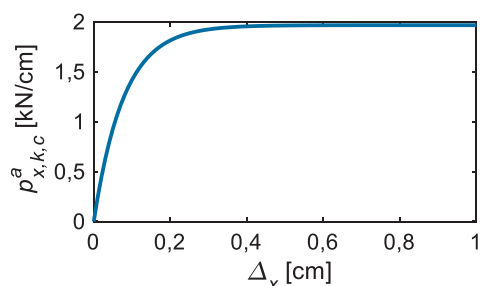
V analizi sovprežnega nosilca smo za parametre *A* in *B* v enačbi (83) izbrali vrednosti 1 in 12,789 $\frac{1}{\text{cm}}$, za število čepov tipa Nelson pa $n=16$. Nosilnost enega strižnega čepa tipa Nelson smo v enačbi (83) označili z P_{Rd} . Določimo jo z enačbo

$$P_{Rd} = \min \left\{ \frac{0,8 f_{u,c} \pi d^2}{4 \gamma_v}, \frac{0,29 \alpha d^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_v} \right\} = 73,73 \text{ kN}, \quad (84)$$

kjer smo za delni varnostni faktor izbrali vrednost $\gamma_v=1,25$, za premer čepa $d=19$ mm, za karakteristično tlačno trdnost betona $f_{ck}=25$ MPa, za elastični modul betona $E_{cm}=31000$ MPa, za natezno trdnost jeklenega čepa $f_{u,c}=420$ MPa, za višino strižnega trna $h_{sc}=100$ mm in za $\alpha=1$, saj velja $h_{sc}/d=5,26>4$.

Glede na to, da smo armiranobetonsko ploščo in jekleni nosilec na polovici razpona sovprežnega nosilca povezali z 8 strižnimi čepi tipa Nelson, za celotno nosilnost stika dobimo $P_{Rd,skup}=8 P_{Rd}=589,84$ kN. Ker pa je natezna nosilnost jeklenega nosilca IPE 200 enaka $P_{Rd,IPE200}=A_x^a f_y=669,75$ kN in torej večja od nosilnosti stika ($P_{Rd,IPE200} > P_{Rd,skup}$), lahko z osmimi strižnimi čepi tipa Nelson dosežemo le delno povezavo med armiranobetonsko ploščo in jeklenim nosilcem obravnavanega sovprežnega prostoležečega nosilca. Nelinearni konstitucijski zakon stika skladno s priporočili Huang (enačba (83)) glede na predstavljene materialne parametre na stiku med slojema sovprežnega nosilca prikazujemo na sliki 15.

Na koncu predstavitev računskih parametrov v preglednici 10 predstavimo še geometrijske karakteristike sloja *a* in sloja *b* obravnavanega sovprežnega nosilca. Tudi tu smo, enako kot v primeru 4.1, skladno s priporočili Cowperja [Cowper, 1966] in Hjelmstada [Hjelmstad, 2005] prilagodili strižne in torzijske geometrijske karakteristike prečnih prereзов sloja *a* in sloja *b*.



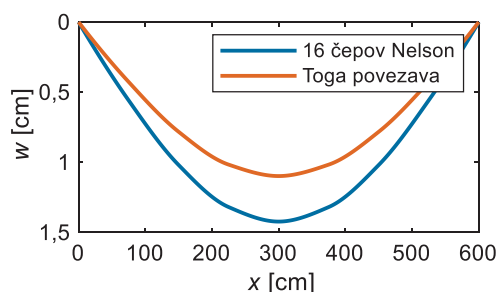
Slika 15. Nelinearni konstitucijski zakon stika med armiranobetonsko ploščo in jeklenim nosilcem skladno s priporočili Huang (16 strižnih čepov tipa Nelson M19, višine 100 mm).

	A_x^i [cm ²]	A_y^i [cm ²]	A_z^i [cm ²]	I_y^i [cm ⁴]	I_z^i [cm ⁴]	I_t^i [cm ⁴]
sloj a	28,5	17	14	1940	142	6,98
sloj b	2100	2100	2100	34300	3937500	3971800

Preglednica 10. Geometrijske karakteristike sloja a in sloja b.

Vpliv konstitucijskega zakona stika. V nadaljevanju s predstavljenimi računskimi podatki analiziramo vpliv nelinearnega konstitucijskega zakona stika med armiranobetonsko ploščo in jeklenim nosilcem na togost sovprežnega prostoležečega nosilca.

Ker projektanti pri dokazovanju varnosti sovprežnih nosilcev iz jekla in betona najpogosteje predpostavijo, da je povezava med slojema sovprežnih nosilcev popolnoma toga, najprej s predstavljenim numeričnim modelom analiziramo pravilnost te predpostavke. To bomo ocenili s primerjavo potekov pove-sov med sovprežnima nosilcema s togo povezavo med sloje-ma in podajno povezavo, ki jo določa šestnajst strižnih čepov tipa Nelson (slika 16)



Slika 16. Primerjava poteka komponent prečnih pomikov w med nosilcema s togo in podajno povezavo med slojema.

Kot lahko vidimo na sliki 16, ima podajnost stika med slojema sovprežnega nosilca izrazit vpliv na njegovo togost. Za nosilec s togo povezavo med slojema je največji povos na sredini razpo-na $w_{\max, \text{Togo}} = 1,098$ cm, za nosilec s podajno povezavo med sloje-ma pa $w_{\max, \text{Podajno}} = 1,423$ cm. Razlika med največjima povosoma je kar 30 %.

Na koncu računskega primera podrobno analiziramo še vpliv števila strižnih čepov tipa Nelson na togost sovprežnih

nosilcev. Analizirali bomo sedem sovprežnih nosilcev. Ti se bodo razlikovali izključno glede na število izvedenih striž-nih čepov tipa Nelson na stiku med slojema. V preglednici 11 prikazujemo oznake obravnavanih sovprežnih nosilcev s pripadajočimi razmaki med čepi tipa Nelson, e in številom čepov n .

oznaka	e [cm]	n
R1	popolnoma podajen stik	
R2	50	12
R3	40	15
R4	30	20
R5	20	30
R6	10	60
R7	tog stik	

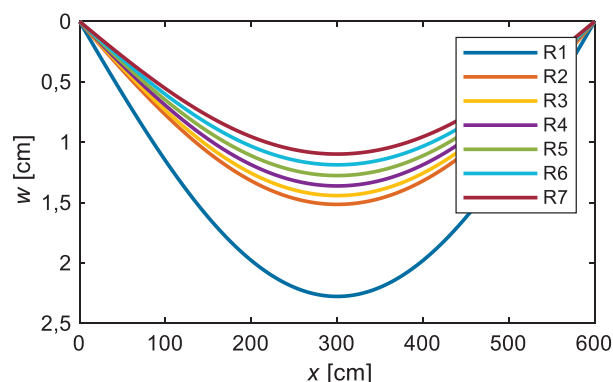
Preglednica 11. Oznake analiziranih sovprežnih nosilcev s pripadajočimi razmaki med čepi tipa Nelson, e in številom strižnih čepov tipa Nelson n .

oznaka	$w_{\max, Ri}$ [cm]	$\frac{w_{\max, Ri}}{w_{\max, R7}}$
R1	2,277	2,07
R2	1,515	1,38
R3	1,442	1,31
R4	1,362	1,24
R5	1,276	1,16
R6	1,187	1,08
R7	1,098	1,00

Preglednica 12. Odvisnost največjih povosov od števila striž-nih čepov tipa Nelson ter odstopanja teh glede na največji povos sovprežnega nosilca s togo povezavo.

Rezultate parametrične študije prikazujemo v preglednici 12. Tu poleg največjih povosov obravnavanih sovprežnih nosilcev prikazujemo tudi odstopanja teh glede na največji povos so-vprežnega nosilca s togo povezavo med slojema.

Rezultati v preglednici 12 dokazujejo, da s strižnimi čepi tipa Nelson zelo težko zagotovimo togo povezavo med slojema sovprežnega nosilca, saj je razlika med največjima povosoma nosilca s togo povezavo in nosilca s kar šestdesetimi strižni-mi čepi tipa Nelson ($e=10$ cm) še vedno 8 %. S primerjanjem največjih povosov obravnavanih sovprežnih nosilcev R1 in R2 v preglednici 12 pa opazimo še, da že z dvanajstimi strižnimi čepi tipa Nelson ($e=50$ cm) zagotovimo dobro povezano delo-vanje armiranobetonske plošče in jeklenega nosilca. To nazor-no dokazuje tudi slika 17, na kateri prikazujemo poteke pove-sov vseh sedmih obravnavanih sovprežnih nosilcev.



Slika 17. Poteki komponent povesov za obravnavane sovprežne nosilce.

5 ZAKLJUČEK

V članku smo predstavili nov matematični in numerični model za analizo DSP-nosilcev s podajnim stikom. Pri izpeljavi osnovnih enačb modela smo upoštevali, da se sloja na stiku lahko zamakneta v vzdolžni in prečni smeri, ne moreta pa se zamakniti pravokotno na ravnino stika. V modelu smo tudi upoštevali, da strižne deformacije vplivajo na togost DSP-nosilcev. V izogib negativnim vplivom singularnosti zaradi veznih enačb med reševanjem, smo osnovne enačbe konsistentno ločili na dva nepovezana sistema. Osnovne enačbe matematičnega modela smo rešili z metodo končnih elementov. S tem namenom smo razvili novo družino deformacijskih končnih elementov, pri kateri smo za interpolacijske nastavke deformacijskih količin izbrali Lagrangeve polinome poljubne stopnje.

S konvergenčnimi in parametričnimi študijami smo ugotovili:

- da so deformacijski končni elementi zelo natančni, saj v obravnavanem primeru že s štirimi končnimi elementi tipa E_{4-5} (pri katerih deformacijske količine interpoliramo z Lagrangeovimi polinomi četrte stopnje, kot integracijsko shemo vzdolž osi končnega elementa pa izberemo pettočkovno Gaussovo shemo) izračunamo fizikalne količine kontinuirnih DSP-nosilcev na stotinko promila natančno, in so tako primerni za analizo DSP-nosilcev;
- da podajnost stika med slojema DSP-nosilcev bistveno vpliva na njihovo togost in jo zato moramo v analizi DSP-nosilcev upoštevati;
- da je vpliv strižnih deformacij na togost DSP-nosilcev najmanjši pri nosilcih s podajnimi stiki; posledično je vpliv strižnih deformacij na togost DSP-nosilcev s podajnim stikom manjši kot pri homogenih prostorskih nosilcih.

V nadaljnjih raziskavah bomo linearno elastična modela slojev nosilca nadgradili z nelinearnima modeloma ter predstavljeni in razširjeni model nadgradili tudi za analizo DSP-nosilcev, ki so izpostavljeni požaru.

6 ZAHVALA

Zahvaljujemo se Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, ki je s projektoma P2-0260 in Z2-3203 finančno podprla to delo.

7 LITERATURA

Challamel, N., Girhammar, U. A., Lateral-torsional buckling of partially composite horizontally layered or sandwich-type beams under uniform moment, *Journal of Engineering Mechanics*, 139:1047-1064, 2013.

Cowper, G. R., The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, *Journal of Applied Mechanics*, 33(2):335-340, 1966.

Čas, B., Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji, Doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2004.

Čas, B., Planinc, I., Schnabl, S., Analytical solution of three-dimensional two-layer composite beam with interlayer slips, *Engineering Structures*, 173:269-282, 2018.

Fabbrocino, G., Manfredi, G., Cosenza, E., Non-linear analysis of composite beams under positive bending, *Computers and Structures*, 70:77-89, 1999.

Girhammar, U. A., Gopu, V. K. A., Composite beam-columns with inter-layer slip-exact analysis, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 199(4):1265-1282, 1993.

Goodman, J. R., Popov, E. P., Layered wood systems with inter-layer slip, *Wood Science*, 1(3):148-158, 1969.

Hearn, E. J., *Mechanics Of Materials 2*, Third Edition, Oxford: Butterworth-Heinemann, 1997.

Hjelmstad, K. D., *Fundamentals of Structural Mechanics*, Second Edition, Illinois: Springer, 2005.

Hozjan, T., Nelinearna analiza vpliva požara na sovprežne linijske konstrukcije, Doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2009.

Hozjan, T., Saje, M., Srpič, S., Planinc, I., Geometrically and materially non-linear analysis of planar composite structures with an interlayer slip, *Computers and Structures*, 114-115:1-17, 2013.

Huang, Z., Burgess, I. W., Plank, R. J., The influence of shear connectors on the behaviour of composite steel-framed buildings in fire, *Journal of Constructional Steel Research*, 51:219-237, 1999.

Krofljč, A., Nelinearna analiza večslojnih kompozitnih linijskih konstrukcij, Doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2012.

Newmark, N. M., Siest, C. P., Viest, C. P., Test and analysis of composite beams with incomplete interaction, *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, 1:75-92, 1951.

Reissner, E., On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, *Journal of Applied Mechanics and Physics (ZAMP)*, 23:795-804, 1972.

Simo, J. C., A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:55-70, 1985.

SIST, SIST EN 1990: 2004, Evrokod – Osnove projektiranje konstrukcij, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, 2004.

SIST, SIST EN 1995-1-1: 2005, Evrokod 5: Projektiranje lesenih konstrukcij – 1-1. del: Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, 2005.

Udovč, G., Planinc, I., Hozjan, T., Analiza dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema, *Kuhljevi dnevi 2021*, Slovensko društvo za mehaniko, Bohinjska Bistrica, 23.-24. September 2021, 209-218, 2021.