

doc. dr. Jerneja Češarek Kolšek univ. dipl. inž. grad.  
jerneja.cesarek@fgg.uni-lj.si



prof. dr. Igor Planinc, univ. dipl. inž. grad.  
igor.planinc@fgg.uni-lj.si



izr. prof. dr. Sebastjan Bratina, univ. dipl. inž. grad.  
sebastjan.bratina@fgg.uni-lj.si  
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,  
Jamova 2, Ljubljana



**Znanstveni članek**  
UDK 539.382:624.072.2

# ANALIZA VPLIVA RAZPOK V BETONU NA TOGOST ARMIRANOBETONSKIH NOSILCEV

## ANALYSIS OF THE EFFECT OF CRACKS IN CONCRETE ON THE STIFFNESS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

### Povzetek

Zaradi majhne natezne nosilnosti betona armiranobetonske konstrukcije razpokajo že pri nizkem nivoju zunanje obtežbe. Dobro je znano, da razpoke v betonskem delu armiranobetonskih nosilcev bistveno vplivajo na velikosti pomikov le-teh, medtem ko razporeditev, število in širina razpok odločilno vplivajo na njihovo trajnost. Pogosto pravimo, da razpoke bistveno vplivajo na togost armiranobetonskih nosilcev. V članku predstavimo novo družino deformacijskih končnih elementov za analizo vpliva razpok na togost armiranobetonskih nosilcev. Prednosti predstavljenega numeričnega modela sta dve: (i) model omogoča upoštevati tudi vplive zdrsov med armaturnimi palicami in betonom in (ii) prečne razpoke armiranobetonskega nosilca so v modelu obravnavane diskretno, pri tem pa so med analizo njihove lege vzdolž osi nosilca oziroma vzdolž končnega elementa poljubne in jih ni treba, kot pri drugih modelih, poznati vnaprej. To pomeni, da mreže končnih elementov v predstavljenem numeričnem modelu ni treba prilagoditi legam razpok vzdolž osi armiranobetonskega nosilca. Primerjava med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati analiz na prostoležečem armiranobetonskem nosilcu je pokazala, da s predstavljenim modelom zelo dobro določimo njegovo obtežno deformacijsko krivuljo kot tudi razporeditev, število in širino razpok. Zato je predstavljeni numerični model primeren za analizo vpliva razpok v betonu na togost armiranobetonskih nosilcev.

Ključne besede: armirani beton, natezna togost, razpokanost, diskretna razpoka, geometrijska nezveznost

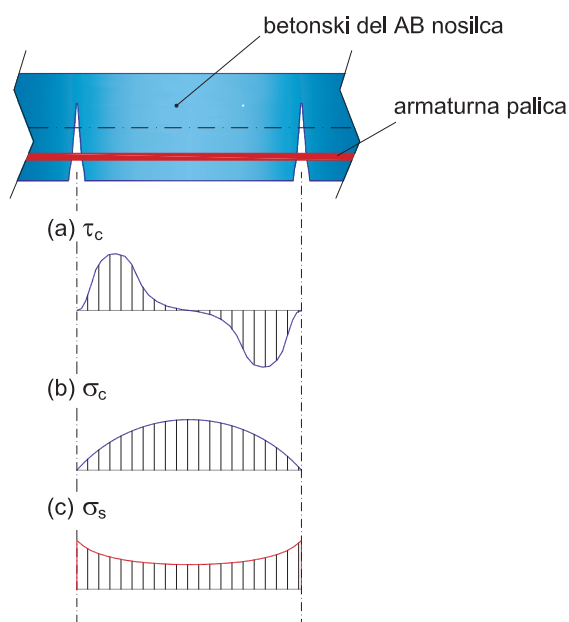
## Summary

Due to the low tensile strength of concrete, reinforced concrete structures crack even at a low external load. It is well known that cracks in reinforced concrete structures have a significant influence on their displacements, while the distribution, number and width of cracks have an important influence on their durability. It is often claimed that cracks significantly affect the stiffness of reinforced concrete beams. This article presents a new family of strain-based finite elements for analyzing the effects of cracks on the stiffness of reinforced concrete beams. Two advantages of the presented numerical model can be mentioned: (i) the model takes into account the slip between reinforcing bars and concrete, and (ii) the transverse cracks in the reinforced concrete beam are treated discretely in the model, while their position in the finite element during the analysis is arbitrary and does not need to be known in advance, as in other models. This means that the finite element mesh in the presented numerical model does not need to be adjusted to the location of the cracks along the axis of the reinforced concrete beam. A comparison between the experimental and numerical results of the studied simply supported reinforced concrete beam showed that the presented model can be used to determine the load-displacement curve as well as the distribution, number and width of cracks very well. Therefore, the presented numerical model is suitable to analyze the influence of cracks in concrete on the stiffness of reinforced concrete beams.

Key words: reinforced concrete, tension stiffening, cracking, discrete crack, geometric discontinuity

## 1 UVOD

Beton je krhek heterogeni material, ki razpoka že pri relativno nizkih nateznih obremenitvah. Zato pri dokazovanju mejne nosilnosti armiranobetonskih (v nadaljevanju AB) konstrukcij v skladu s standardi Evrokod (mejna stanja nosilnosti) upoštevamo le tlačno nosilnost betona [SIST, 2005] (glej npr. konstitucijski model betona na sliki 2(a)). Vendar pa kljub razpokam v betonu, ki se pojavijo zaradi njegove majhne natezne trdnosti, ta zaradi sovprežnega vpliva sodeluje pri prevzemanju nateznih obremenitev v AB-konstrukciji [Venkateswarlu, 1972], saj se med razpokami v betonu natezne napetosti ustrezno prerazporedijo med armaturnimi palicami in betonom. Ta prerazporeditev natezne obremenitve je mogoča zaradi zdrsov na stiku med armaturnimi palicami in betonom ter posledično sprijemnih napetosti na njunem stiku (slika 1).

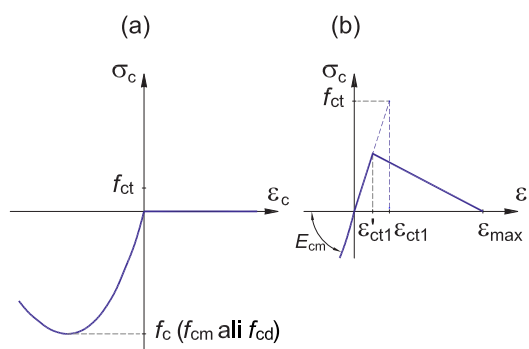


**Slika 1.** Razporeditev: (a) sprjemnih napetosti  $\tau_c$  na stiku med betonom in armaturno palico, (b) normalnih napetosti v betonu  $\sigma_c$  na stiku z armaturno palico in (c) normalnih napetosti v armaturni palici  $\sigma_s$ .

Ta sovprežni prispevek betona k natezni togosti AB-konstrukcij ni zanemarljiv in ga praviloma upoštevamo pri preverjanju mejnih stanj uporabnosti, tj., ko ugotavljamo velikosti povosov in širine razpok ter tudi ko preverjamo nivo napetosti v betonu in armaturnih palicah.

V literaturi lahko zasledimo različne matematične modele, s katerimi upoštevamo prispevke te t. i. sovprežne natezne togosti (ang. tension stiffening) AB-okvirjev oziroma nosilcev pri določitvi pomikov in širine razpok tovrstnih konstrukcij. Pri najpreprostejših modelih ustrezno modificiramo materialni model za armaturo (npr. [Pöttler, 1987]) ali pa materialni model betona v nategu (npr. [Bergan, 1979]). Seveda pa z omenjenima preprostima modeloma zgolj približno ocenimo prispevek natezne nosilnosti betona k togosti AB-nosilca. Pričakovano pa s takšnimi modeli ne moremo ustrezno določiti

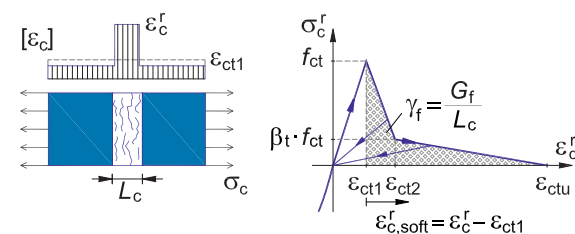
števila, širine in razporeditve razpok. Primer modificiranega materialnega modela betona v nategu, kot ga predlagata Bergan in Holand, prikazujemo na sliki 2(b).



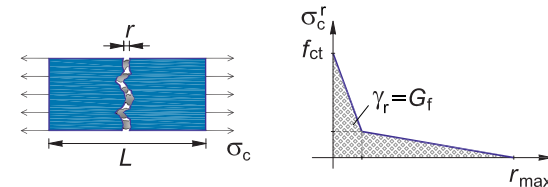
**Slika 2.** Materialna modela betona v nategu: (a) brez natezne nosilnosti, (b) natezna nosilnost betona, modificirana skladno s priporočili Bergana in Holanda [Bergan, 1979] ( $\epsilon'_{ct1}=0,055\text{‰}$  in  $\epsilon_{max}=0,7\text{‰}$ ).

V znanstveni literaturi zasledimo tudi natančnejše matematične modele za analizo vpliva prečnih razpok na togost AB-okvirjev oziroma nosilcev. Omenimo le dva, ki sta zasnovana na mehaniki loma. Prvi je model razmazane razpoke, drugi pa model diskretne razpoke (slika 3). Fizikalne razloge za uporabo teh modelov za analizo togosti AB-nosilcev sta detajlno predstavila Bažant in Planas [Bažant, 1998]. Da pa je treba za ustrezno modeliranje vpliva razpok na togost AB-nosilcev upoštevati tudi zdrs med armaturnimi palicami in betonom, v svojih raziskavah utemeljujeta tudi Mathern in Yang [Mathern, 2021].

(a) model razmazane razpoke



(b) model diskretne razpoke



**Slika 3.** (a) Model razmazane in (b) model diskretne razpoke.

Matematični model razmazane razpoke za analizo togosti AB-nosilcev uvrščamo v družino t. i. neločnih matematičnih modelov. Za te modele je značilno, da so njihovi materialni modeli odvisni od deformacij na končno veliki okolici opazovanega delca in ne le od deformacij njegove infinitezimalne okolice [Bažant, 1998]. V sklopu tega modela vplivno območje deforma-

cij opazovanega delca določa materialni parameter  $L_c$ , ki ga imenujemo karakteristična dolžina mehčanja AB-nosilca (glej sliko 3(a)). Slabost tega modela pa je predvsem v tem, ker moramo med analizo vnaprej predvideti območja mehčanja AB-nosilca. Ne glede na to pa nam ta model omogoča analizo mehčanja prečnih prereзов AB-nosilcev tako v nategu (glej npr. [Bažant, 1998], [Fib, 2013], [Markovič, 2013], [Mathern, 2021], [Rabczuk, 2005], [Yang, 2007]) kot tudi v tlaku ([Coleman, 2001], [Krätzig, 2004], [Markeset, 1995], [Markovič, 2012], [Mathern, 2021]). Parameter  $L_c$ , tj. območje AB-nosilca s konstantnimi ekvivalentnimi osnimi deformacijami  $\epsilon_c^*$ , določimo v materialnem modelu betona v nategu z energijo loma  $G_f$  [Bažant, 1998] oziroma v tlaku z energijo drobljenja [Coleman, 2001] (glej sliko 3(a)).

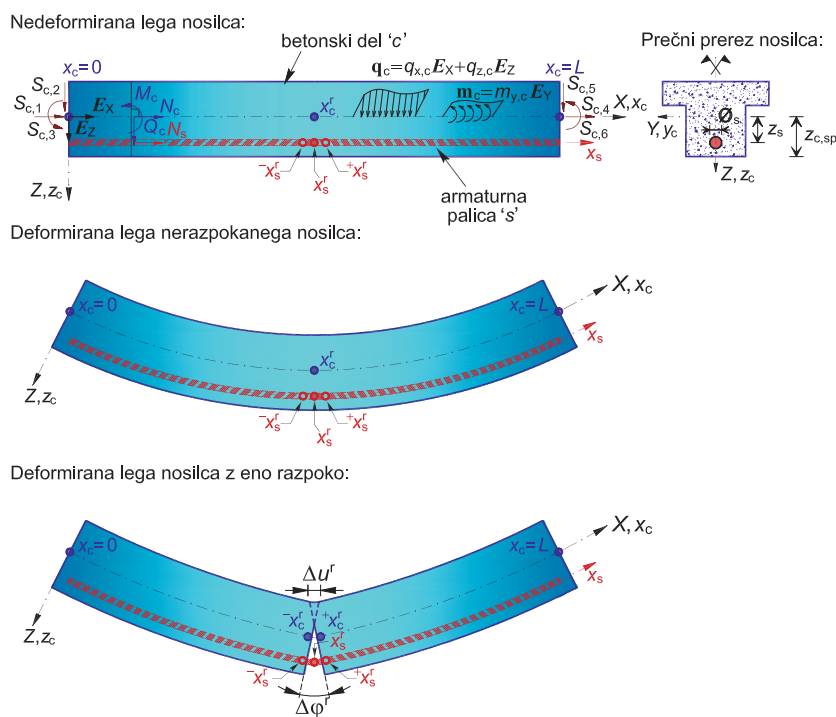
V znanstveni literaturi zasledimo tudi številne raziskovalce (glej npr. [Bajc, 2018], [Dias-da-Costa, 2009], [Fib, 2013], [Yang, 2007]), ki vpliv razpok na togost AB-nosilcev analizirajo z modelom diskretne razpoke (glej sliko 3(b)). Vendar se tudi pri implementaciji tega matematičnega modela soočimo z istim problemom kot pri implementaciji modela razmazane razpoke, saj moramo v analizi vnaprej določiti mesta prečnih razpok. Ker za analizo praviloma uporabljamo metodo končnih elementov, kjer so mesta prečnih razpok vozlišča končnih elementov (glej npr. [Bajc, 2018], [Domaneschi, 2021]), moramo za dovolj natančno analizo razporeditve, števila in širine razpok uporabiti zelo gosto mrežo končnih elementov. V sklopu matematičnih modelov za analizo togosti AB-konstrukcij, pri katerih razpoke obravnavamo diskretno, pa v znanstveni literaturi zasledimo tudi številne numerične metode, ki niso zasnovane na metodi končnih elementov (glej npr. [Alanani, 2020], [Domaneschi, 2021], [Forti, 2019], [Fujiwara, 2015], [Rabczuk, 2008], [Yang, 2007]).

V članku bomo predstavili nov numerični model za analizo vpliva prečnih razpok na togost AB-nosilcev. Predstavljeni model upošteva prečne razpoke diskretno in je zasnovan na deforma-

cijski metodi končnih elementov. Glavna značilnost nove družine deformacijskih končnih elementov je v tem, da je prečna razpoka sestavni del končnega elementa, pri tem pa je njena lega v njem poljubna in je ni treba poznati vnaprej. Materialni model odpiranja razpoke pa v predstavljenem modelu določimo s pomočjo dobro znanega materialnega modela betona v fazi mehčanja in ekvivalentne osne deformacije, ki ga uporabljamo v modelu razmazane razpoke. Predstavljeni numerični model dejansko predstavlja nadgradnjo modela za analizo prečnih razpok na togost natežno obremenjene AB-palice [Ogrin, 2022].

## 2 MATEMATIČNI MODEL AB-NOSILCA Z VGRAJENO RAZPOKO

Obravnavamo AB-nosilec z dolžino  $L$  in s konstantnim prečnim prereзом. Pri tem z  $(\bullet)_c$  označimo fizikalne količine, ki pripadajo betonskemu delu AB-nosilca, z  $(\bullet)_s$  pa količine, ki pripadajo armaturnim palicam. Ne izgubimo splošnosti izpeljave, če predpostavimo, da je nosilec armiran le z eno armaturno palico. Pri tem je  $\emptyset_s$  njen premer,  $z_s$  njena oddaljenost od referenčne osi betonskega dela nosilca,  $A_s$  pa površina njene prečne preseka. Pri izpeljavi matematičnega modela AB-nosilca betonski del s površino  $A_c$  in vzdolžno armaturno palico obravnavamo ločeno, pri čemer pri armaturni palici zanemarimo upogibno togost, tako da jo modeliramo z modelom osno raztegljive vrvi, ki je obdana z betonskim ovojem. Upoštevamo tudi, da se na stiku med armaturno palico in betonskim ovojem lahko pojavijo zamiki ( $\Delta$ ), prečni razmiki pa so prepredeni. Dodatno predpostavimo, da je nosilec izpostavljen kratkotrajnemu delovanju zunanje linijske obtežbe ( $q_c$  oz.  $m_c$ ), ki deluje v referenčni osi betonskega dela, ter robni obtežbi na začetku oziroma koncu betonskega dela AB-nosilca ( $S_{c,i}$ ). Na sliki 4 predstavimo nedeformirano ter dve deformirani legi AB-nosilca. Prva deformirana lega nosilca je lega nosilca brez



Slika 4. Nedeformirana in deformirani legi AB-nosilca, izpostavljenega osnoupogibni obremenitvi.

razpok, druga pa z eno razpoko. Lego prečne razpoke v osi AB-nosilca določa materialna koordinata  $x_c^r$ , velikost razpoke pa določata količini  $\Delta u^r$  in  $\Delta \varphi^r$ , njun pomen je natančneje predstavljen v poglavju 2.2.

Pri izpeljavi osnovnih enačb AB-nosilca upoštevamo specifično spremembo dolžine  $\varepsilon_{c0}$  in ukrivljenost referenčne osi  $\kappa_c$  betonskega dela nosilca (osno in upogibne deformacije) ter specifično spremembo dolžine  $\varepsilon_s$  armaturne palice (osno deformacijo), medtem ko strižno deformiranje betonskega dela zanemarimo. Velja Bernoullijeva predpostavka o ravnih prečnih prerezih betonskega dela, tj., prečni prerezi so tudi v deformirani legi ravni in pravokotni na deformirano referenčno os nosilca. Potek osnih deformacij po višini prečnega prereza je linearen:  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c0} + z_c \kappa_c$ . Dodatno predpostavimo, da so vzdolžni ( $u_c$ ,  $u_s$ ) in prečni pomiki ( $w_c$ ) ter zasuki prečnega prereza betonskega dela ( $\varphi_c$ ) 'majhni', prav tako so 'majhni' tudi zamiki na stiku med armaturno palico in betonom. To pa pomeni, da kinematične in ravnotežne enačbe matematičnega modela AB-nosilca zapišemo v linearni obliki, medtem ko so konstitucijske enačbe modela nelinearne.

## 2.1 Osnovne enačbe nerazpokanega nosilca

Osnovne enačbe nerazpokanega AB-nosilca izpeljemo z linearizacijo Reissnerjevih enačb ravninskega nosilca [Bratina, 2018] okoli njegove začetne nedeformirane lege. Sestavlja jih 8 enačb za betonski del, od tega 3 kinematične, 3 ravnotežne in 2 konstitucijske enačbi:

$$u'_c - \varepsilon_{c0} = 0, \quad (1)$$

$$w'_c + \varphi_c = 0, \quad (2)$$

$$\varphi'_c - \kappa_c = 0, \quad (3)$$

$$N'_c + q_{x,c} + p_{t,c} = 0, \quad (4)$$

$$Q'_c + q_{z,c} + p_{n,c} = 0, \quad (5)$$

$$M'_c - Q_c + m_{y,c} + z_s p_{t,c} = 0, \quad (6)$$

$$N_c = N_{cc} = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon_c) dA_c, \quad (7)$$

$$M_c = M_{cc} = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon_c) z_c dA_c, \quad (8)$$

4 enačbe za armaturno palico, od tega 1 kinematična, 2 ravnotežni in 1 konstitucijska:

$$u'_s - \varepsilon_s = 0, \quad (9)$$

$$N'_s + p_{t,s} = 0, \quad (10)$$

$$-N_s \kappa_{s,0} + p_{n,s} = 0, \quad (11)$$

$$N_s = N_{sc} = \sigma_s(\varepsilon_s) A_s, \quad (12)$$

ter 4 vezne enačbe za stik med armaturno palico in betonom, od tega 1 kinematična, 2 ravnotežni in 1 konstitucijska:

$$\Delta = u_s - (u_c + z_s \varphi_c), \quad (13)$$

$$p_{t,c} + p_{t,s} = 0, \quad (14)$$

$$p_{n,c} + p_{n,s} = 0, \quad (15)$$

$$p_{t,c} = \tau_c(\Delta) \pi \varnothing_s. \quad (16)$$

V enačbah (1)–(16), ki jih v nadaljevanju imenujemo splošne ravnotežne enačbe AB-nosilca z upoštevanjem zdrsa med armaturno palico in betonskim ovojem, smo z  $N_c$ ,  $Q_c$

in  $M_c$  označili osno in prečno silo ter upogibni moment betonskega dela, z  $N_s$  pa osno silo v armaturni palici. Z  $N_{cc}$ ,  $M_{cc}$  in  $N_{sc}$  smo označili konstitucijske količine v betonskem delu oziroma v armaturni palici. Te so odvisne od izbranega materialnega modela betona oziroma armature. Kot je to običajno pri analizi in projektiranju linijskih gradbenih konstrukcij, ju izrazimo v obliki sovisnosti med normalno napetostjo prečnega prereza nosilca in pripadajočo osno deformacijo ( $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c)$ ,  $\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_s)$ ).

V veznih enačbah (14) in (15) sta  $p_{t,c}$  in  $p_{t,s}$  strižni komponenti kontaktne linijske obtežbe na stiku med armaturno palico in betonskim ovojem,  $p_{n,c}$  in  $p_{n,s}$  pa normalni komponenti. Ker je začetna ukrivljenost ravnih armaturnih palic enaka nič,  $\kappa_{s,0} = 0$ , ugotovimo s pomočjo enačb (11) in (15), da je  $p_{n,c} = p_{n,s} = 0$ . Zamik  $\Delta$  na stiku med betonskim ovojem in armaturno palico izračunamo kot razliko vzdolžnih pomikov na medsebojnem stiku (enačba (13)). Velikost zamika je odvisna od fizikalnih lastnosti stika, ki ga izrazimo v obliki sovisnosti med sprijemno napetostjo na stiku  $\tau_c$  in zamikom  $\Delta$  (glej enačbo (16)).

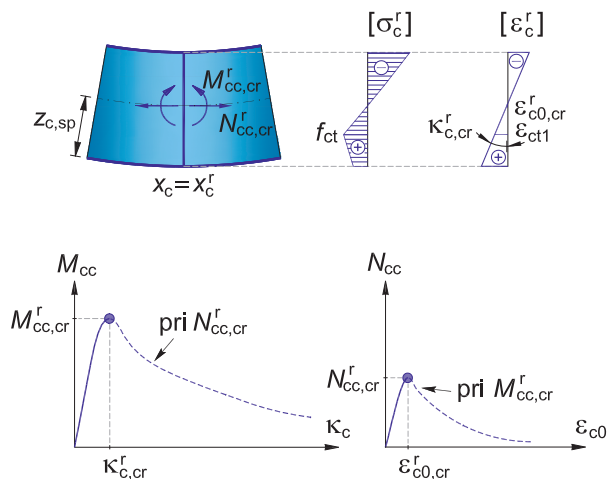
## 2.2 Osnovne enačbe razpokanega nosilca

Pri izpeljavi osnovnih enačb matematičnega modela razpokanega AB-nosilca predpostavimo, da se prečna razpoka v betonskem delu nosilca pojavi pri materialni koordinati  $x_c^r$  (glej sliko 4(c)). Ne izgubimo splošnosti, če analiziramo AB-nosilec z eno razpoko. Kot rečeno, prečno razpoko v predstavljenem modelu obravnavamo kot geometrijsko nezveznost nosilca. Raziskovalci (glej npr. [Bajc, 2018], [Fib, 2013], [Ogrin, 2022]) kot kriterij za nastanek razpoke v AB-palici upoštevajo pogoj dosežene natezne trdnosti betona, tj.  $\sigma_c = f_{ct}$ , ki jo betonski ovoj skladno z izbranim materialnim modelom betona doseže pri osni deformaciji  $\varepsilon_{ct1}$ . Pri upogibno obremenjenem AB-nosilcu pa moramo kriterij nastanka prečne razpoke v nosilcu temu ustrezno prilagoditi. S tem namenom predpostavimo, da se razpoka odpre v trenutku, ko je osnoupogibna obremenitev prečnega prereza enaka mejni nosilnosti betonskega dela AB-nosilca (glej oznako • na diagramih na sliki 5), torej:

$$N_c(x_c^r) = N_{cc,cr}^r, \quad (17)$$

$$M_c(x_c^r) = M_{cc,cr}^r. \quad (18)$$

Količini  $N_{cc,cr}^r$  in  $M_{cc,cr}^r$  v enačbah (17) in (18) določata mejno osnoupogibno nosilnost betonskega dela prečnega prereza AB-nosilca. Kritični prečni prerez AB-nosilca določa materialna koordinata  $x_c^r$ , pripadajoči mejni deformaciji pa označimo z  $\varepsilon_{c0,cr}^r$  in  $\kappa_{c,cr}^r$ . Poudarimo pa, da deformaciji določata stanje še zaprte prečne razpoke v betonu. Glede na zveznost parametrov materialnega modela temu pogoju za nastanek razpoke zadostimo z zahtevo, da je determinanta tangentne materialne matrike betonskega dela prečnega prereza enaka nič, torej  $\det \mathbf{C} = C_{11} C_{22} - C_{12}^2 = 0$ , hkrati pa mora biti zadoščeno tudi pogoju  $C_{11} > 0$ . Komponente tangentne materialne matrike betonskega dela prečnega prereza so določene z izrazi:  $C_{11} = \int_{A_c} E_t dA_c$ ,  $C_{12} = \int_{A_c} E_t z_c dA_c$  in  $C_{22} = \int_{A_c} E_t z_c^2 dA_c$ , kjer je  $E_t = \partial \sigma_c / \partial \varepsilon_c$  trenutni tangentni modul betona. Potek normalne napetosti  $\sigma_c^r$  in pripadajočih deformacij ( $\varepsilon_{c0,cr}^r$ ,  $\kappa_{c,cr}^r$ ) v betonskem delu prečnega prereza AB-nosilca tik pred odprtjem razpoke prikazujemo na sliki 5.



**Slika 5.** Napetostno in deformacijsko stanje v betonskem delu prečnega prereza AB-nosilca ob izpolnjenih pogojih za nastanek razpoke ( $\det \mathbf{C} = 0$ ).

Ko se prečna razpoka v betonu odpre, nosilec na mestu razpoke obravnavamo kot geometrijsko nezveznost nosilca, tj., nosilec se je razdelil na dva sicer povezana, vendar geometrijsko ločena dela. To pa pomeni, da sta sedaj v AB-nosilcu na mestu razpoke dva prečna prereza, ki se med seboj razmakneta in različno zasukata (glej sliko 4(c)). Predpostavimo pa, da njuno morebitno prekrivanje nima vpliva na odziv nosilca. Prečni prerez na levi strani razpoke, ki je še vedno pravokoten na referenčno os nosilca, določa materialna koordinata  ${}^{\sim}x_c^r$ , prerez na desni strani, ki je prav tako pravokoten na referenčno os nosilca, pa koordinata  ${}^{+}x_c^r$ . Velikost in oblika prečne razpoke AB-nosilca je torej odvisna od razlike vodoravnih pomikov  $\Delta u^r$  in razlike zasukov  $\Delta \varphi^r$  med omenjenima prečnima prerezoma, ki ju izračunamo z enačbama:

$$\Delta u^r = u_c({}^{+}x_c^r) - u_c({}^{\sim}x_c^r), \quad (19)$$

$$\Delta \varphi^r = \varphi_c({}^{+}x_c^r) - \varphi_c({}^{\sim}x_c^r), \quad (20)$$

širino razpoke na zunanem robu pa izračunamo s pomočjo enačbe:

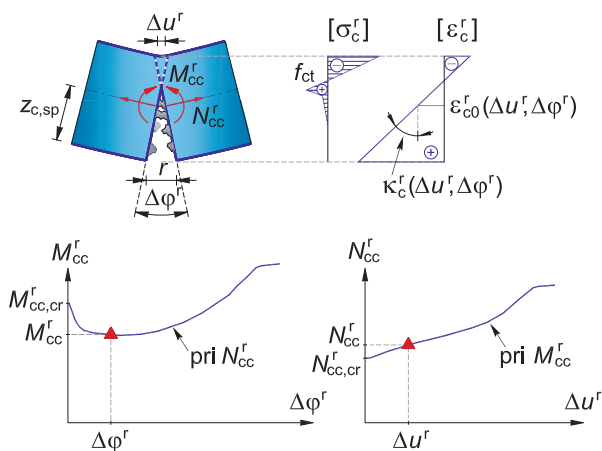
$$r = \Delta u^r + z_{c,sp} \Delta \varphi^r. \quad (21)$$

Čeprav razpoka razdeli AB-nosilec na dva dela, predpostavimo, da sta prečna prereza ob razpoki še vedno delno povezana. To povezavo med prečnima prerezoma izrazimo z osno silo in upogibnim momentom v razpoki in ju označimo z  $N_{cc}^r$  in  $M_{cc}^r$ . Določimo ju skladno z izbranim materialnim modelom odpiranja prečne razpoke, kot pogosto govorimo, in ju izrazimo v odvisnosti od geometrijskih količin  $\Delta u^r$  in  $\Delta \varphi^r$  (glej oznako ▲ na diagramih na sliki 6). Formalno ju torej izrazimo z enačbama:

$$N_{cc}^r = N_{cc}^r(\Delta u^r, \Delta \varphi^r), \quad (22)$$

$$M_{cc}^r = M_{cc}^r(\Delta u^r, \Delta \varphi^r). \quad (23)$$

V analizi linijskih AB-konstrukcij materialna modela betona in armaturnih palic izrazimo v obliki sovisnosti med normalno napetostjo in osno deformacijo. Na ta način izpeljemo tudi materialni model odpiranja razpoke (enačbi (22) in (23)),



**Slika 6.** Materialni model odpiranja razpoke.

ki jo v modelu obravnavamo kot geometrijsko nezveznost nosilca. Posledično je ta del nosilca sestavljen iz dela, kjer se sosednja prečna prereza razmakneta, in dela, kjer se prereza prekrijeta. Na mestu nezveznosti nosilca predpostavimo linearen potek ekvivalentne osne deformacije po višini betonskega dela prečnega prereza AB-nosilca,  $\varepsilon_c^r = \varepsilon_{c0}^r + z_c \kappa_c^r$ , kot to velja v prečnem prerezu pred nastankom razpoke. V nadaljevanju za del razpoke, kjer se prečna prereza med seboj razmakneta ( $\varepsilon_c^r > 0$ ), uporabimo sovisnost med normalno napetostjo v razpoki  $\sigma_c^r$  in pripadajočo ekvivalentno natezno osno deformacijo  $\varepsilon_c^r$ , kot je definirana v modelu razmazane razpoke (glej sliko 3(a)), za del razpoke, kjer se prečna prereza prekrijeta in so ekvivalentne osne deformacije tlačne ( $\varepsilon_c^r < 0$ ), pa sovisnost med napetostjo  $\sigma_c^r$  in deformacijo  $\varepsilon_c^r$  opišemo z materialnim modelom betona v tlaku. Tako lahko materialni model odpiranja razpoke (enačbi (22) in (23)) zapišemo z izrazoma:

$$N_{cc}^r = \int_{A_c} \sigma_c^r(\varepsilon_c^r(\Delta u^r, \Delta \varphi^r)) dA_c, \quad (24)$$

$$M_{cc}^r = \int_{A_c} \sigma_c^r(\varepsilon_c^r(\Delta u^r, \Delta \varphi^r)) z_c dA_c. \quad (25)$$

Pri tem sta  $\varepsilon_{c0}^r$  in  $\kappa_c^r$ , kot rečeno, ekvivalentna osna oziroma upogibna deformacija v razpoki kot geometrijski nezveznosti nosilca. Potek normalnih napetosti in ekvivalentnih osnih deformacij po višini prečnega prereza prikazujemo na sliki 6. Ko se razpoka odpre, se mora upogibni moment v razpoki zmanjšati,  $M_{cc}^r < M_{cc,cr}^r$ , ob tem pa velja  $\varepsilon_{c0}^r > \varepsilon_{c0,cr}^r$  in  $\kappa_c^r > \kappa_{c,cr}^r$ . Pogosto v takih primerih govorimo o materialnem mehčanju med odpiranjem razpoke. Zaradi ravnotežja se upogibna momenta v prečnih prerezih v neposredni okolici razpoke, tj. v prečnih prerezih s koordinatama  ${}^{\sim}x_c^r$  oziroma  ${}^{+}x_c^r$ , prav tako zmanjšata, vendar se pri tem, drugače kot v razpoki, zmanjšajo tudi pripadajoče deformacije. Tako smo mehčanje oziroma lokalizacijo deformacij omejili le na razpoko, podobno, kot je to določeno pri modelu razmazane razpoke.

Na koncu predstavimo še enačbi, s katerima kinematični količini  $\Delta u^r$  in  $\Delta \varphi^r$  povežemo z ekvivalentnima deformacijama v razpoki,  $\varepsilon_{c0}^r$  in  $\kappa_c^r$ . Enačbi sta preprosti:

$$\varepsilon_{c0}^r = \varepsilon_{c0,cr}^r + \frac{\Delta u^r}{L_c}, \quad (26)$$

$$\kappa_c^r = \kappa_{c,cr}^r + \frac{\Delta \varphi^r}{L_c}, \quad (27)$$

kjer smo z  $L_c$  označili dolžino območja mehčanja, definirano v skladu z modelom razmazane razpoke (glej sliko 3(a)). Vpeljava omenjenega materialnega parametra  $L_c$  je posledica definicije materialnega modela odpiranja razpoke v obliki  $\sigma_c^r = \sigma_c^r(\varepsilon^r)$ . Izraza (26) in (27) sta zelo podobna zvezi med širino razpoke in ekvivalentno lokalizirano deformacijo pri centrično natezno obremenjeni AB-palici (glej [Ogrin, 2022]).

## 2.3 Metoda končnih elementov

Osnovne enačbe matematičnega modela, s katerim izračunamo vpliv razpok na togost AB-nosilcev, ki smo jih predstavili v prejšnjih poglavjih, so nelinearne. Zato jih rešimo numerično, praviloma z metodo končnih elementov. V tem članku jih bomo rešili s pomočjo deformacijske metode končnih elementov. S tem namenom izpeljemo novo družino deformacijskih končnih elementov z vgrajeno razpoko. Kot je značilno za deformacijske končne elemente, pri izpeljavi izhajamo iz modificiranega izreka o virtualnem delu. Detajlno smo postopek za AB-palico predstavili v [Ogrin, 2022], tu pa ga ustrezno priredimo za razpokan AB-nosilec, ki je izpostavljen osno-upogibni obremenitvi. Modificiran izrek o virtualnem delu za razpokan AB-nosilec je:

$$\begin{aligned} \delta W^* = & \int_0^{x_c^r} (N_{cc} - N_c) \delta \varepsilon_{c0} dx + \int_0^{x_c^r} (M_{cc} - M_c) \delta \kappa_c dx + \\ & (N_{cc}^r - N_c^r) \delta \Delta u^r + (M_{cc}^r - M_c^r) \delta \Delta \varphi^r + \int_{x_c^r}^L (M_{cc} - M_c) \delta \kappa_c dx + \\ & \int_0^L (N_{sc} - N_s) \delta \varepsilon_s dx + \text{vezi + robni pogoji} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

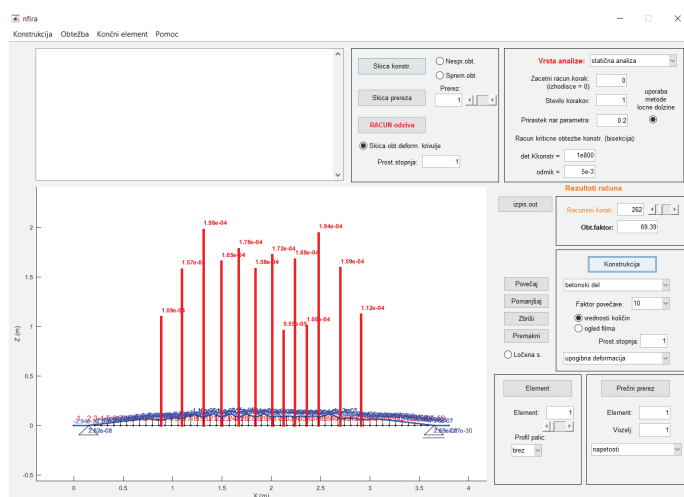
Ker smo enačbi (24) in (25) točno zadostili, je tudi členoma pri variaciji  $\delta \Delta u^r$  in  $\delta \Delta \varphi^r$  zadoščeno, zato ju v funkcionalu (28) lahko izpustimo. Kot posebnost omenimo, da v funkcionalu (28) poleg robnih pogojev na obeh koncih nosilca nastopajo tudi robni pogoji ob nastali prečni razpoki. Ko v nadaljevanju razširjeni funkcional ustrezno uredimo, ostanejo v njem edine neznane funkcije osne in upogibne deformacije betonskega dela AB-prereza ( $\varepsilon_{c0}$ ,  $\kappa_c$ ) ter osna deformacija armaturne palice ( $\varepsilon_s$ ). Te količine v nadaljevanju aproksimiramo z Lagrangevimi interpolacijskimi polinomi stopnje  $p$ . Na osnovi zahteve, da so variacije v funkcionalu poljubne in neodvisne, dobimo po znanih postopkih variacijskega računa sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb končnega elementa z vgrajeno razpoko. Vse integrale, ki nastopajo v enačbah končnega elementa, rešimo numerično. Tu smo izbrali Lobattovo integracijsko shemo stopnje  $s$ . Za označevanje končnih elementov z vgrajeno razpoko uporabimo oznako  $KE_{p-s}^r$ , za elemente brez razpoke, ki jih izpeljemo po enakem postopku, pa  $KE_{p-s}^r$ .

## 2.4 Postopek reševanja posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb

Skladno z metodo končnih elementov AB-nosilec razdelimo na poljubno število končnih elementov. V končnih elementih, kjer so med analizo izpolnjeni pogoji za nastanek prečne razpoke, standardne, nerazpokane končne elemente  $KE_{p-s}^r$  nadomestimo s končnimi elementi  $KE_{p-s}^r$ , ki imajo vgrajeno prečno razpoko. Z znanimi postopki v numerični teoriji konstrukcij vse enačbe nato združimo v enačbo AB-nosilca:

$$G(x, \lambda) = 0. \quad (29)$$

V enačbi (29) smo z  $x$  označili vektor neznanih količin (deformacijske, statične in kinematične količine), z  $\lambda$  pa obtežni faktor AB-nosilca. Nelinearni algebrski sistem enačb (29) rešimo s pomočjo metode ločne dolžine [Crisfield, 1981]. S to metodo lahko določimo obtežno deformacijsko krivuljo AB-nosilca tudi v kritičnih točkah krivulje, tj. tam, kjer Newtonova inkrementno-iteracijska metoda odpove. Računalniški program za reševanje diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb razpokanega AB-nosilca smo izdelali v programskem okolju Matlab [The MathWorks, 2016]. Osnovno ukazno okno programa, ki smo ga imenovali NFIRA, prikazujemo na sliki 7.



Slika 7. Osnovno ukazno okno programa NFIRA.

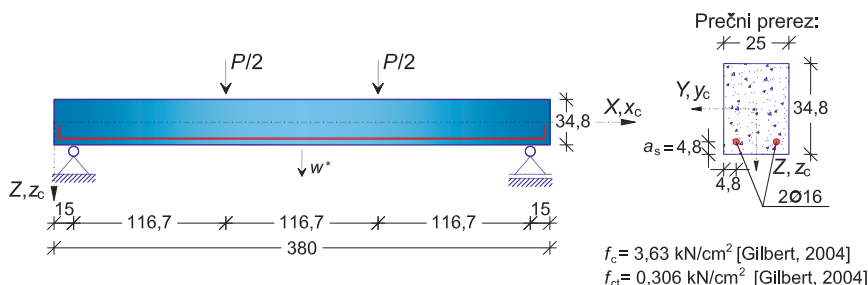
## 3 GILBERTOV ARMIRANOBETONSKI NOSILEC

Primernost in natančnost nove družine deformacijskih končnih elementov za analizo vpliva razpok na togost AB-nosilcev prikazujemo na primeru preprostega prostoležečega AB-nosilca. To storimo s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati. Pri tem eksperimentalne rezultate povzamemo skladno z izsledki Gilberta in Nejadija [Gilbert, 2004].

### 3.1 Osnovni podatki

Gilbert in Nejadi [Gilbert, 2004] sta med številnimi drugimi preizkusi, ki sta jih predstavila, analizirala tudi dva, vsaj načelno enaka prostoležeča nosilca z dolžino  $L=3,8$  m in pravokotnim prečnim prerezo  $b/h=25/34,8$  cm ter ojačana z dvema vzdolžnima armaturnima palicama premera  $\varnothing 16$ . Nosilca sta označila z B1-a in B1-b ter ju med eksperimentom obtežila z dvema navpičnima točkovnima silama  $P/2$ , ki sta ju monotonno povečevala. Osnovne geometrijske in materialne podatke obravnavanega AB-nosilca, ki smo jih uskladili z eksperimentalnimi podatki Gilberta in Nejadija, prikazujemo na sliki 8 (vse dimenzije nosilca so v cm).

Med upogibnim preizkusom sta Gilbert in Nejadi pri izbranih obtežnih korakih beležila navpični pomik na sredini razpeti-



**Slika 8.** Geometrijski in materialni podatki obravnavanega prostoležečega AB-nosilca.

ne nosilca ( $w^*$ ), razporeditev in širino razpok v betonskem delu AB-nosilca, deformacije armaturnih palic ter osne deformacije na površini betona.

Da izpostavimo tudi učinkovitost predstavljenega numeričnega modela, predstavimo tudi rezultate analiz s sorodnimi numeričnimi modeli. Oznake vseh uporabljenih numeričnih modelov in njihove bistvene značilnosti predstavimo v preglednici 1.

lih pa v analizah AB-nosilca obnašanje betona v nategu opišemo v obliki sovisnosti med normalno natezno napetostjo  $\sigma_c$  in pripadajočo osno deformacijo  $\varepsilon_c$ .

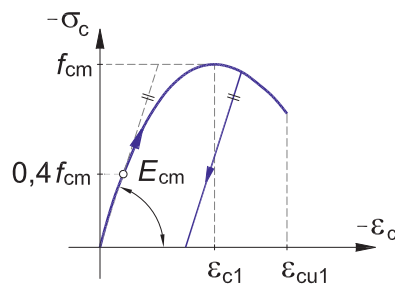
Pri modelu z oznako **M2** natezno togost betona upoštevamo skladno s priporočili Bergana in Holanda [Bergan, 1979] (glej sliko 2(b)). Pri tem v modelu upoštevamo naslednje vrednosti materialnih parametrov:  $\varepsilon'_{cl} = 0,055 \%$ ,  $\varepsilon_{max} = 0,7 \%$  in  $E_{cm} = 3300 \text{ kN/cm}^2$ .

| Oznaka uporabljenega modela | Materialni model betona v tlaku                                      | Materialni model betona v nategu                                                                        | Materialni model stika med armaturo in betonom | Uporabljena mreža končnih elementov |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>M1</b>                   | nelinearen, namenjen analizi konstrukcij [SIST, 2005] (glej sliko 9) | brez natezne nosilnosti (glej sliko 2(a))                                                               | tog stik                                       | 20 $KE_{4-5}$                       |
| <b>M2</b>                   |                                                                      | modificiran model [Bergan, 1979] (slika 2(b))                                                           | tog stik                                       | 20 $KE_{4-5}$                       |
| <b>M3</b>                   |                                                                      | model razmazane razpoke - $KE_{0-1}$ [Markovič, 2013]: $L_c = 6,48 \text{ cm}$ , $G_f = 75 \text{ N/m}$ | podajen stik [Fib, 2013]                       | 2 $KE_{4-5}$ + 54 $KE_{0-1}$        |
| <b>M4-1</b>                 |                                                                      | model razpoke kot geom. nezveznosti v elementu: $L_c = 6,48 \text{ cm}$ , $G_f = 75 \text{ N/m}$        | podajen stik [Fib, 2013]                       | 56 $KE_{4-5}^r$                     |
| <b>M4-2</b>                 |                                                                      |                                                                                                         |                                                | 26 $KE_{4-5}^r$                     |

**Preglednica 1.** Oznake uporabljenih numeričnih modelov in njihove bistvene značilnosti.

### 3.1.1 Materialni model betona v tlaku

Pri vseh numeričnih modelih smo v analizah AB-nosilca obnašanje betona v tlaku opisali v obliki sovisnosti med normalno tlačno napetostjo  $\sigma_c$  in pripadajočo osno deformacijo  $\varepsilon_c$  v skladu z nelinearnim materialnim modelom, ki ga podaja standard Evrokod 2 [SIST, 2005] in je namenjen analizi AB-konstrukcij (slika 9). Materialni parametri modela so: povprečna tlačna trdnost betona  $f_{cm}$ , dosežena pri deformaciji  $\varepsilon_{cl}$ , mejna tlačna deformacija betona  $\varepsilon_{cu1}$  in sekantni modul elastičnosti betona  $E_{cm}$ . Za številčne vrednosti materialnih parametrov modela izberemo naslednje vrednosti:  $f_{cm} = 3,63 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\varepsilon_{cl} = -2,2 \%$ ,  $\varepsilon_{cu1} = -3,5 \%$  in  $E_{cm} = 3300 \text{ kN/cm}^2$ .



**Slika 9.** Materialni model betona v tlaku skladno s standardom Evrokod 2 [SIST, 2005].

### 3.1.2 Materialni model betona v nategu

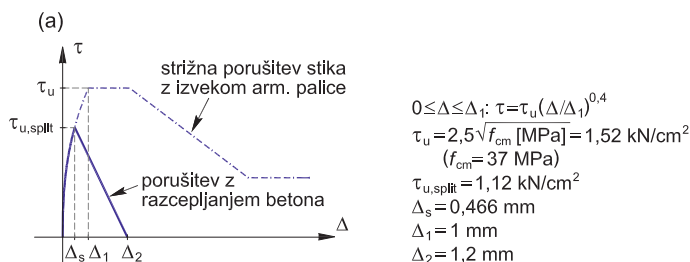
Pri numeričnem modelu z oznako **M1** natezno nosilnost betona zanemarimo (glej sliko 2(a)), pri ostalih numeričnih mode-

Pri modelih z oznakami **M3**, **M4-1** in **M4-2** obnašanje betona v nategu opišemo s 3-linearnim materialnim modelom, kot ga predlagajo Rabczuk in sodelavci [Rabczuk, 2005], in ga prika-

zujemo na sliki 3(a). V modelu **M3** dolžino območja mehčanja oziroma zelo razpokano območje v betonskem delu AB-nosilca omejimo na dolžino enega končnega elementa  $KE_{0-1}$  [Markovič, 2013], in sicer  $L_c = 6,48$  cm. Ob ocenjeni energiji loma betona  $G_f = 75$  N/m [CEB-FIP, 1993] so vrednosti materialnih parametrov modela naslednje:  $f_{ct} = 0,306$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{ct1} = 0,0863$  ‰,  $\varepsilon_{ct2} = \varepsilon_{ct1} + \alpha_t (\varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{ct1})$ ,  $\varepsilon_{ctu} = 2,075$  ‰,  $\alpha_t = 0,14$  in  $\beta_t = 0,24055$ . V modelih z oznakama **M4-1** in **M4-2** ohranimo enake vrednosti parametrov modela betona v nategu kot v modelu z oznako **M3**. Ob tem pa zapiranje in ponovno odpiranje razpoke v modelu upoštevamo kot degradacijo natezne togosti betona skladno z [Bažant, 1998] (slika 3(a)).

### 3.1.3 Materialni model stika med armaturo in betonom

V modelih z oznakami **M3**, **M4-1** in **M4-2** povzamemo materialni model stika med armaturno palico in betonom po literaturi [Fib, 2013]. Ker je debelina krovnega sloja betona manjša od 5 $\emptyset$ , podatkov o vgrajeni stremenski armaturi pa ni na voljo, skladno z modelom predpostavimo, da porušitev stika nastopi z razcepljanjem betona. Uporabljen materialni model stika med armaturnimi palicami in betonom in pripadajoče materialne parametre modela prikazujemo na sliki 10. Model predstavlja zvezo med strižno napetostjo  $\tau$  in zamikom med armaturno palico in betonom  $\Delta$ .



**Slika 10.** Materialni model stika med armaturno palico in betonom in vrednosti pripadajočih materialnih parametrov [Fib, 2013].

## 3.2 Primerjave med rezultati analiz

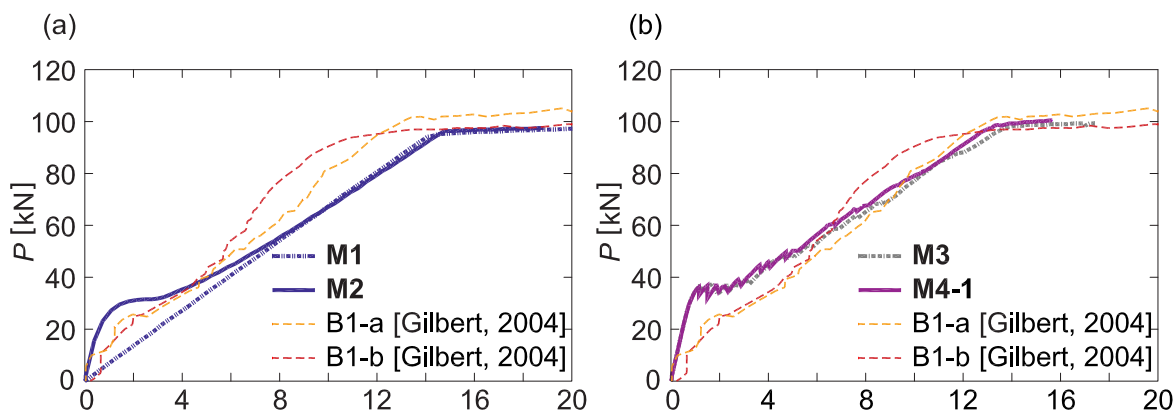
Rezultate analiz AB-nosilca z vsemi petimi numeričnimi modeli z oznakami **M1**, **M2**, **M3**, **M4-1** in **M4-2** prikazujemo v nadaljevanju. Rezultate analiz primerjamo z dostopnimi rezultati meritev obravnavanega AB-nosilca. Omejimo se na primerjavo med obtežno deformacijskimi krivuljami  $P-w^*$  ter primerjavo med razporeditvijo, številom in širino razpok v betonskem delu AB-nosilca. V vseh prikazanih analizah predpostavimo začetno nepopolnost nosilca v obliki nesimetrične razporeditve obtežbe (0,49:0,51  $P$ ).

### 3.2.1 Obtežno deformacijska krivulja $P-w^*$

Na sliki 11 prikazujemo spreminjanje navpičnega pomika na sredini razpetine AB-nosilca  $w^*$  v odvisnosti od velikosti navpične točkovne obtežbe  $P$ . Iz rezultatov meritev lahko opazimo, da je začetna togost pri obeh preizkušanih nosilcih neustrezna, saj na krivulji ne opazimo začetne nerazpokane togosti nosilcev. Predvidevamo, da sta bila nosilca predhodno že razpokana, bodisi zaradi transporta bodisi reoloških pojavov v betonu.

Obtežno deformacijske krivulje smo v numeričnih analizah določili do sile  $P \approx 100$  kN, ko nastopi opazno zmanjšanje upogibne togosti obravnavanega AB-nosilca zaradi plastifikacije vzdolžne natezne armature. Izmerjena nosilnost je sicer znašala 109 kN za nosilec B1-a oziroma 103 kN za B1-b.

Ugotovimo, da je pri modelih z oznakama **M1** in **M2** izračunan navpični pomik večji od izmerjenega. To je pričakovano, ker smo natezno nosilnost betona v modelu **M1** zanemarili oziroma njen prispevek v modelu **M2** podcenili. V analizah z obema modeloma pa dovolj natančno ocenimo velikost zunanje obtežbe, pri kateri nastopi plastifikacija vzdolžne natezne armature. Pri analizah nosilca z modeli **M3** in **M4-1** oz. **M4-2** se izračunani pomiki precej bolje prilegajo izmerjenim predvsem v fazi nastajanja in odpiranja razpok ter ob nastopu plastifikacije vzdolžne armature. Poudarimo pa, da sta obtežno deformacijski krivulji, določeni z modeloma **M4-1** in **M4-2**, pri katerih spreminjamo le mrežo KE, praktično enaki, zato na sliki 11(b) prikazujemo le eno. To pa dokazuje, da je odziv AB-nosilca neodvisen od izbrane mreže končnih elementov z vgrajeno



**Slika 11.** Obtežno deformacijske krivulje  $P-w^*$ ; primerjava med eksperimentalnima krivuljama in krivuljami numeričnih analiz za (a) modela **M1** in **M2**, (b) modela **M3** in **M4-1**.

razpoko  $KB_{p-s}^*$ . V preglednici 2 podajamo velikosti izmerjenih ter izračunanih navpičnih pomikov  $w^*$  pri obtežbi  $P=70$  kN, kar seveda potrjuje naše prejšnje ugotovitve.

| Eksperiment |      | Račun |      |     |      |      |
|-------------|------|-------|------|-----|------|------|
| B1-a        | B1-b | M1    | M2   | M3  | M4-1 | M4-2 |
| 9,0         | 7,3  | 10,4  | 10,4 | 9,0 | 8,3  | 8,4  |

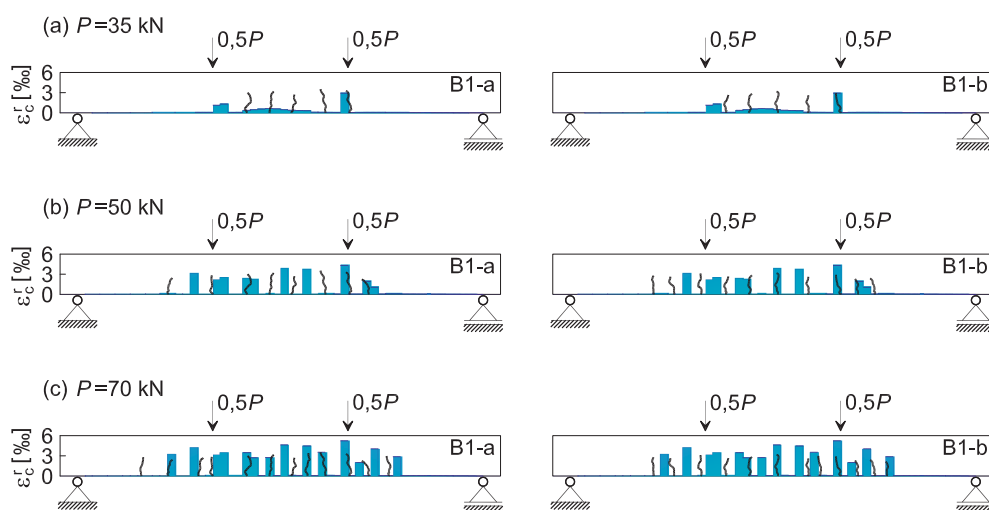
**Preglednica 2.** Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi navpičnimi pomiki na sredini razpetine nosilca  $w^*$  [mm] pri obtežbi  $P=70$  kN.

### 3.2.2 Razporeditev, število in širina razpok

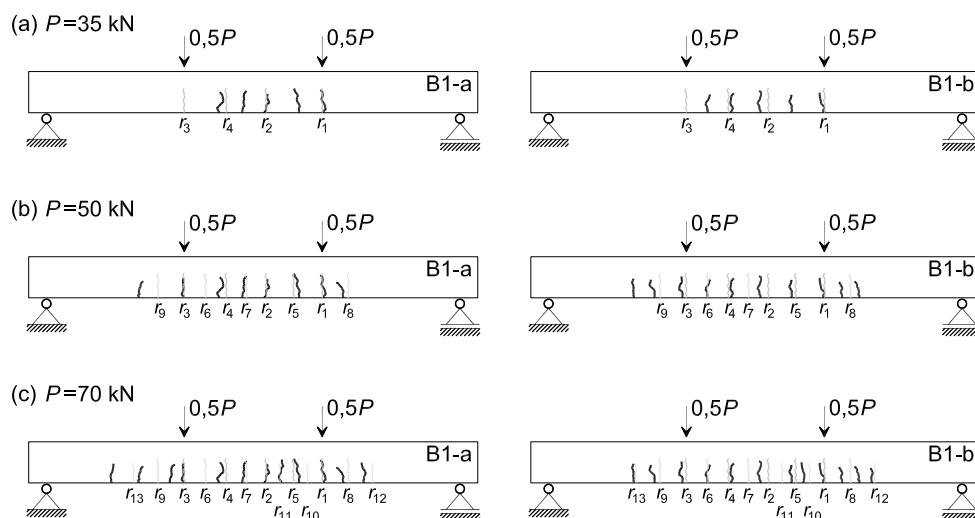
Na koncu prikažemo še primerjavo med izmerjeno in izračunano razporeditvijo, številom in širino razpok v betonu vzdolž

osi nosilca za tri nivoje zunanje obtežbe,  $P=35$ , 50 in 70 kN. Seveda lahko rezultate primerjamo le za modele z oznakami **M3**, **M4-1** in **M4-2**, pri katerih vpliv razpok na togost AB-nosilca modeliramo z modelom razmazane razpoke (**M3**) oziroma z novimi deformacijskimi končnimi elementi z vgrajeno razpoko (**M4-1** in **M4-2**). Kot pa je dobro znano, moramo za ustrezno analizo vpliva razpok v betonu na togost AB-nosilcev v modelu upoštevati tudi zamik na stiku med armaturo in betonskim ovojem [Mathern, 2021].

Najprej predstavimo rezultate računske analize modela z oznako **M3**, tj. z modelom razmazane razpoke (glej sliko 12). Ugotovimo, da z modelom **M3** relativno dobro ocenimo območje razpokanosti AB-nosilca, medtem ko je določanje leg posameznih razpok precej nenadzorovan proces, ponekod se razmazana razpoka razproštrava kar čez dva sosednja končna elementa, prav tako pa ne moremo s tem modelom določiti širine posameznih razpok. Poznamo le vrednost ekvivalentne deformacije  $\varepsilon_c^r$  v razpoki.



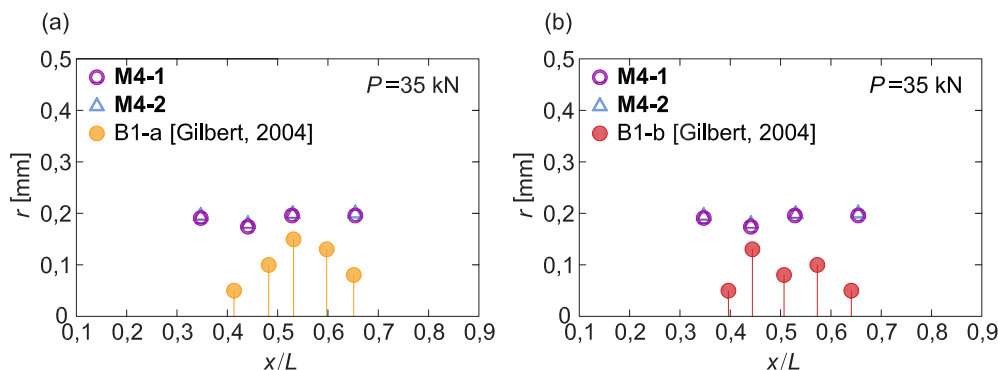
**Slika 12.** Primerjava izmerjene in izračunane razporeditve razpok z modelom **M3** za tri nivoje zunanje obtežbe.



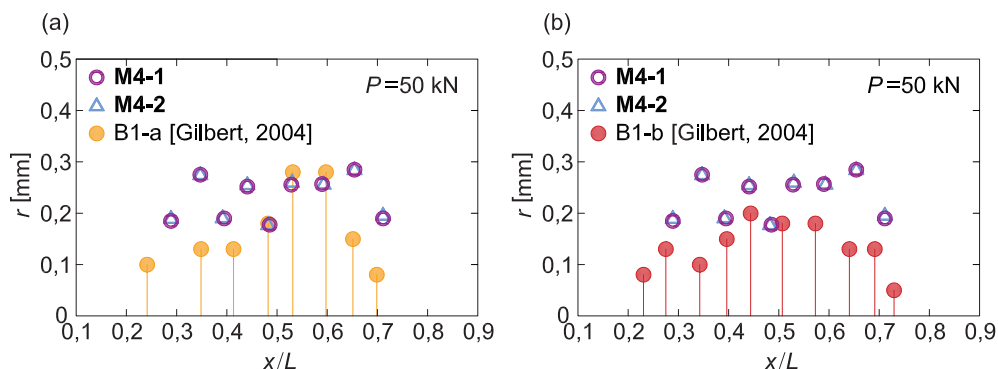
**Slika 13.** Primerjava izmerjene in izračunane razporeditve in števila razpok z modelom **M4-1** za tri nivoje zunanje obtežbe.

V nadaljevanju prikažemo primerjavo med izmerjeno in izračunano razporeditvijo, širino in številom razpok še za modela z oznakama **M4-1** in **M4-2**. Na sliki 13 prikazujemo razporeditev razpok vzdolž nosilca za model **M4-1** pri treh nivojih zunanje obtežbe. Ugotovimo, da se tako število razpok kot njihova lega zelo dobro prilegajo meritvam. Pri obtežbi  $P=35$  kN se v računski analizi pojavijo 4 razpoke, med eksperimentom pa ena več. Pri obtežbi  $P=50$  kN se število razpok v analizi poveča na 9, medtem ko se jih med eksperimentom pojavi 8 (nosilec B1-a) oziroma 10 (B1-b). Pri obtežbi  $P=70$  kN je računsko število razpok enako 13, izmerjeno število razpok pa je 12.

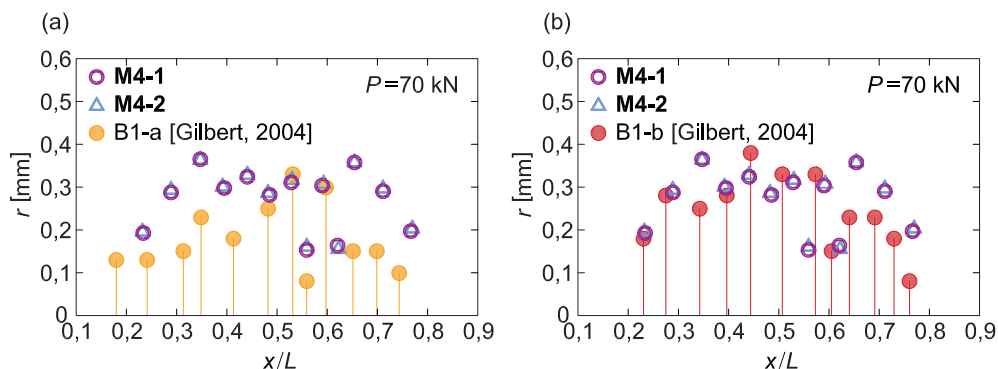
Na slikah 14, 15 in 16 prikazujemo primerjavo izračunane širine razpok za modela **M4-1** in **M4-2** z izmerjenimi širinami razpok za tri nivoje zunanje obtežbe. Širine razpok izračunamo na spodnjem robu nosilca s pomočjo izraza (21). Poudarimo pa, da Gilbert in Nejadi [Gilbert, 2004] nista natančno navedla, na katerem mestu sta merila širino razpok. Najprej ugotovimo, da so rezultati analiz obeh modelov z oznakama **M4-1** in **M4-2** praktično enaki, in to kljub temu, da v modelih uporabljamo različno število končnih elementov, tj. 56 oziroma 26  $KE_{p-s}^r$ . To- rej gostota mreže predstavljene družine končnih elementov nima vpliva na razporeditev, lego in širino razpok. To na primer



**Slika 14.** Primerjava izračunanih širin razpok z modeloma **M4-1** in **M4-2** pri obtežbi  $P=35$  kN z izmerjenimi širinami razpok za AB-nosilca z oznakama (a) B1-a in (b) B1-b.



**Slika 15.** Primerjava izračunanih širin razpok z modeloma **M4-1** in **M4-2** pri obtežbi  $P=50$  kN z izmerjenimi širinami razpok za AB-nosilca z oznakama (a) B1-a in (b) B1-b.



**Slika 16.** Primerjava izračunanih širin razpok z modeloma **M4-1** in **M4-2** pri obtežbi  $P=70$  kN z izmerjenimi širinami razpok za AB-nosilca z oznakama (a) B1-a in (b) B1-b.

pomeni, da se pri obtežbi  $P=70$  kN zadnja (13.) razpoka, ki je tudi najbližje levi podpori AB-nosilca, pri modelu **M4-1** pojavi v 13. končnem elementu na oddaljenosti 2,59 cm od njegovega levega vozlišča ( $x_c^r=88,9$  cm), njena širina je  $r=0,192$  mm, pri modelu **M4-2** pa v 6. končnem elementu na oddaljenosti 14,58 cm ( $x_c^r=87,9$  cm) s širino  $r=0,196$  mm. Ob tem pa tudi ugotovimo, da so izračunane širine razpok pri obtežbi  $P=35$  kN nekoliko večje od izmerjenih. To je pričakovano, saj je v računski analizi število razpok za 1 manjše, kot je bilo zabeleženo med preizkusom (glej sliko 14).

Kot vidimo na slikah 15 in 16, so pri obtežbah  $P=50$  kN in  $P=70$  kN izračunane širine razpok AB-nosilca bistveno bolj primerljive z izmerjenimi. Če bi širine razpok izračunali na mestu natezne armature, bi bila njihova širina še za dobrih 10 % manjša, kar bi pomenilo še boljše ujemanje.

## 4 ZAKLJUČKI

V članku smo predstavili družino novih deformacijskih končnih elementov z vgrajeno razpoko za analizo vpliva razpok na togost linijskih AB-konstrukcij (nosilcev, okvirjev). Pri tem smo razpoko v modelu obravnavali diskretno, in sicer kot geometrijsko nezveznost končnega elementa. Glavna prednost predstavljenega numeričnega modela je v tem, da (i) lege razpok po osi AB-nosilca ni treba predvideti vnaprej, (ii) prečna razpoka se v končnem elementu lahko pojavi na poljubnem mestu in (iii) rezultati analize so z novimi končnimi elementi neodvisni od mreže in števila končnih elementov. Natančnost in primernost predstavljenega numeričnega modela smo prikazali na primeru preprostega prostoležečega AB-nosilca, za katerega so v literaturi na voljo dobro dokumentirani rezultati upogibnega preizkusa. S primerjavo med izmerjenimi in izračunanimi rezultati analiz smo ugotovili, da predstavljena družina novih deformacijskih končnih elementov z vgrajeno diskretno razpoko omogoča dovolj natančno analizo vpliva razpok v betonu na togost AB-nosilcev. Tako lahko s predlaganim modelom kvalitetno izračunamo obtežno deformacijske krivulje obravnavanih AB-nosilcev kot tudi razporeditev, število in širino razpok.

## 5 ZAHVALA

Zahvaljujemo se Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, ki je s projektoma P2-0158 in P2-0260 finančno podprla to delo.

## 6 LITERATURA

Alanani, M., Ehab, M., Salem, H., Progressive collapse assessment of precast prestressed reinforced concrete beams using applied element method, *Case Studies in Construction Materials*, 13, e00457, <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2020.e00457>, 2020.

Bajc, U., Planinc, I., Bratina, S., Non-linear time-dependent analysis of cracked reinforced concrete bar, *Advances in Structural Engineering*, 21(7), 949–961, <https://doi.org/10.1177/1369433217734653>, 2018.

Bažant, Z. P., Planas, J., *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, USA, 1998.

Bergan, P. G., Holand, I., *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*, *Composer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, 443–467, 1979.

Bratina, S., Analiza vpliva razpokanosti na togost upogibno obremenjenega ojačanega betonskega nosilca z modelom razmazane razpoke, *Gradbeni vestnik*, 67(7), 134–144, 2018.

CEB-FIP, CEB-FIP Model Code 1990: Design Codes, Comité Euro-International du Béton and Federation International de la Précontrainte. London: Thomas Telford, 1993.

Coleman, J., Spacone, E., Localization issues in force-based frame elements, *Journal of Structural Engineering*, 127(11), 1257–1265, 2001.

Crisfield, M. A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through, *Computers and Structures*, 13, 55–62, 1981.

Dias-da-Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L. J., Júlio, E., A discrete strong discontinuity approach, *Engineering Fracture Mechanics*, 76(9), 1176–1201, <https://doi.org/10.1016/j.engfrac-mech.2009.01.011>, 2009.

Domaneschi, M., Cimellaro, G. P., Marano, G. C., Morgese, M., Pellicchia, C., Khalil, A. A., Numerical simulations of collapse tests on reinforced concrete beams, In *Bridge Maintenance, Safety, Management, Life-Cycle Sustainability and Innovations* (1st Edition), 2021.

Fib, International Federation for Structural Concrete, *fib Model Code for Concrete Structures 2010*, Berlin: Ernest & Sohn GmbH & Co. KG., 2013.

Forti, T. L. D., Forti, N. C. S., Santos, F. L. G., Carnio, M. A., The continuous-discontinuous Galerkin method applied to crack propagation, *Computers and Concrete*, 23(4), 235–243, 2019.

Fujiwara, Y., Takeuchi, N., Shiomi, T., Kambayashi, A., Discrete crack analysis for concrete structures using the hybrid-type penalty method, *Computers and Concrete*, 16(4), 587–604, <https://doi.org/10.12989/cac.2015.16.4.587>, 2015.

Gilbert, R. I., Nejadi, S., An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads, UNICIV Report No. R-435, 2004.

Krätzig, W. B., Pölling, R., An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters, *Computers & Structures*, 82(15–16), 1201–1215, <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.002>, 2004.

Markeset, G., Hillerborg, A., Softening of concrete in compression - localization and size effects, *Cement and Concrete Research*, 25(4), 702–708, 1995.

Markovič, M., Krauberger, N., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S., Non-linear analysis of pre-tensioned concrete planar beams, *Engineering Structures*, 46, 279–293, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.08.004>, 2013.

Markovič, M., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S., On strain softening in finite element analysis of RC planar frames subjected to fire, *Engineering Structures*, 45, 349–361, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.06.032>, 2012.

Mathern, A., Yang, J., A Practical Finite Element Modeling Strategy to Capture Cracking and Crushing Behavior of Reinforced Concrete Structures, *Materials*, 14(3), 506, <https://doi.org/10.3390/ma14030506>, 2021.

Ogrin, A., Planinc, I., Bratina, S., A novel strain-based finite element family for mesh-independent analysis of the tensile failure of reinforced concrete bars, *Advances in Structural Engineering*, 25(3), 572–584, <https://doi.org/10.1177/13694332211058533>, 2022.

Pöttler, R., Swoboda, G. A., Nonlinear beam element for RC structures, *Communications in Applied Numerical Methods*, 3(5), 397–406, 1987.

Rabczuk, T., Akkermann, J., Eibl, J., A numerical model for reinforced concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 42(5–6), 1327–1354, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.07.019>, 2005.

Rabczuk, T., Zi, G., Bordas, S., Nguyen-Xuan, H., A geometrically non-linear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures, *Engineering Fracture Mechanics*, 75(16), 4740–4758, <https://doi.org/10.1016/j.engfrac-mech.2008.06.019>, 2008.

SIST, SIST EN 1992-1-1:2005, Evrokod 2, Projektiranje betonskih konstrukcij-Del 1-1, Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, 2005.

The MathWorks, Inc., Matlab R2016b, Natick, Massachusetts, USA, 2016.

Venkateswarlu, B., Gesund, H., Cracking and bond slip in concrete beams, *Journal of the Structural Division, ASCE*, 98(11), 2663–2685, 1972.

Yang, X. S., Lees, J. M., Morley, C. T., Modelling crack propagation in structures: Comparison of numerical methods, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11), 1373–1392, <https://doi.org/10.1002/cnm.1038>, 2007.

## ZVEZA DRUŠTEV GRADBENIH INŽENIRJEV IN TEHNIKOV SLOVENIJE

vabi na

### REDNO SKUPŠČINO,

ki bo v četrtek, 1. junija 2023, ob 13.00 uri,  
v prostorih Gostilne Livada, Hladnikova 15, Ljubljana.

Skupščina bo obravnavala in sprejemala:

- poročilo o delu ZDGITS v letu 2022,
- poslovno poročilo ZDGITS za leto 2022 z bilanco stanja in izkazom poslovnega izida,
- letna programa za leti 2023 in 2024 in
- finančni načrt ZDGITS za leto 2023,
- razrešila organe ZDGITS in izvolila nove ter
- podelila priznanja zaslužnim in častnim članom ZDGITS.

Predsednik ZDGITS

Izr. prof. dr. Andrej Kryžanowski, univ. dipl. inž. grad.